MATH.SE

SVERIGES UNIVERSITETS MATEMATIKPORTAL

FÖRBEREDANDE KURS I MATEMATIK 2

Till detta kursmaterial finns prov och lärare på Internet.

Detta material är en utskrift av det webbaserade innehållet i `wiki.math.se/wikis/forberedandematte2`

Studiematerialet hör till en kurs som ges i samarbete mellan flera av landets högskolor och centret MATH.SE.

Anmälan och tillgång till forum, examination och personlig mentor

Anmälan till kursen sker fortlöpande under året genom ett elektroniskt formulär på `www.math.se` och man får då direkt ett användarnamn och lösenord som ger tillgång till diskussionsforum, support, uppföljning och prov. Du får också en personlig mentor som hjälper dig att lyckas med dina studier. All examination sker via Internet efter hand som du arbetar med kursens avsnitt.

Kontaktinformation: `www.math.se/kontakt.html`

Förberedande kurs i matematik 2

Innehåll

För fullständiga lösningar, senaste versionen av materialet, externa länkar, mm., se studiematerialet på Internet `www.math.se/wiki`

Välkommen till kursen

Vad gjorde att Elin blev intresserad av matematik?

Titta på videon där Elin Ottergren, mentor på kursen och tidigare nätstudent, berättar om hur hennes matematikintresse väcktes.

(`http://smaug.nti.se/temp/KTH/film6.html`)

Nu finns ett enkelt sätt att komma bättre rustad till dina högskolestudier

Den här kursen är till för dig som ska läsa en utbildning där matematik ingår, och som vill vara ordentligt förberedd inför kursstarten. Kursen är också bra för dig som av andra anledningar vill fräscha upp dina kunskaper i matematik.

Kursen är en överbryggning från gymnasiet in i högskolan. Även om du klarat matematiken mycket bra tidigare rekommenderar vi dig att läsa kursen. Den berättigar till studiemedel och kan läsas helt via Internet. Kursen ges i samarbete mellan flera av landets högskolor och centret MATH.SE.

Du bestämmer själv när du vill studera och kan lätt anpassa studierna efter dina övriga planer.

Anmälan och tillgång till forum, support, examination och personlig mentor

Kurslitteraturen är öppet tillgänglig via Internet. Anmälan till kursen sker fortlöpande under året genom ett elektroniskt formulär på `www.math.se` och du får då direkt ett användarnamn och lösenord som ger tillgång till allt kursmaterial, diskussionsforum, support, uppföljning och prov. Du får också en personlig mentor som hjälper dig att lyckas med dina studier.

Handledning och examination

Du kan när som helst på nätet diskutera med studiekamrater, ställa frågor och få handledning av lärare. Examination sker via Internet efterhand som du arbetar med kursen. Vissa av våra högskolor erbjuder handledning och satsningar på plats som komplement till det som sker på Internet.

Observera att materialet i denna kurs är utformat för att man ska arbeta med det utan hjälp av miniräknare.

När du kommer till högskolan kommer du nämligen *inte* att få använda miniräknare på dina ”tentor”, åtminstone inte på grundkurserna. På högre kurser i matematik har man knappast någon användning för miniräknare, eftersom matematiken då mer handlar om att förstå principer än att utföra räkneoperationer. Det är exempelvis viktigare att förstå varför $7 + 3$ är detsamma som $3 + 7$, än att kunna utföra additionen och få fram svaret 10.

Så här lyckas du med kursen:

1. Börja med att läsa genomgången till ett avsnitt och tänka igenom exemplen.
2. Arbeta sedan med övningsuppgifterna och försök att lösa dem utan miniräknare. Kontrollera att du kommit fram till rätt svar genom att klicka på svarsknappen. Har du inte det, så kan du klicka på lösningsknappen, för att se hur du ska göra.
3. Gå därefter vidare och svara på frågorna i grundprovet som hör till avsnittet.
4. Skulle du fastna, se efter om någon ställt en fråga om just detta i avsnittets forum. Ställ annars en fråga om du undrar över något. Din lärare (eller en studiekamrat) kommer att besvara den inom några timmar.
5. När du är klar med övningsuppgifterna och grundproven i ett avsnitt så ska du göra slutprovet för att bli godkänd på avsnittet. Där gäller det att svara rätt på tre frågor i följd för att kunna gå vidare.
6. När du fått alla rätt på både grundprov och slutprov, så är du godkänd på den delen och kan gå vidare till nästa del i kursen.

P.S. Tycker du att innehållet i ett avsnitt känns välbekant, så kan du testa att gå direkt till grundprovet och slutprovet. Du måste få alla rätt på ett prov, men kan göra om provet flera gånger, om du inte lyckas på första försöket. Det är ditt senaste resultat som visas i statistiken.

Hur går kursen till?

Elins tips till dig som ska läsa matte på högskolan. Vad kan vara bra att veta?

Titta på videon där Elin Ottergren, mentor på kursen och tidigare "nätstudent", tipsar dig.

(`http://smaug.nti.se/temp/KTH/film7.html`)

Aktuella kunskaper ökar dina chanser att lyckas

Kursen är en överbryggning från gymnasiet in i högskolan och går igenom några av de basfärdigheter som vi tycker är viktiga att du har fullt uppdaterade inför dina högskolestudier. Du läser helt flexibelt i den takt som passar dig själv.

Så här är det tänkt att du ska arbeta med kursen:

- Börja med att läsa genomgången till ett avsnitt och tänka igenom exemplen.
- Arbeta därefter med övningsuppgifterna och svara på frågorna i grundprovet som hör till avsnittet. Skulle du fastna, se efter om någon ställt en fråga om just detta i avsnittets forum, annars ställ en fråga själv.
- När du är klar med övningsuppgifterna och grundprovet i ett avsnitt så gör du slutprovet för att bli godkänd på avsnittet.

Din personliga mentor stöder dig

När du loggat in med ditt användarnamn kommer du till "Student lounge". Där hittar du mailadress och telefonnummer till din personliga mentor som du kan kontakta, om du kör fast på en uppgift eller har något du behöver fråga om.
Mentorerna har tagit namn som Albert Einstein, Kurt Gödel, Arkimedes osv., men bakom dem finns en hel grupp personer,

vilka är lärare och/eller studenter på någon högskola inom MATH.SE. Din mentor vill inget hellre än att hjälpa dig. Vårt gemensamma mål är att alla som börjar på kursen ska klara av den och få en bra grund att stå på inför sina högskolestudier. För oss finns inga dumma frågor, bara de som inte ställs!

Så går examinationen till

Du examineras online

Examinationen består av två självrättande prov per avsnitt och en inlämningsuppgift samt gruppuppgift i slutet av kursen. Var och en av kursens 3 delar motsvarar 1 högskolepoäng och rapporteras i allmänhet till Ladok var för sig på den högskola där du är kursregistrerad (för vissa kurstillfällen sker rapportering när hela kursen är klar). Kursbetyg erhålles när alla tre momenten är godkända. Som betyg på kursen ges underkänt eller godkänt.

Grundproven och slutproven rättas via datorn

Till varje avsnitt i kursen finns det både ett grundprov och ett slutprov. Länk till proven finns i din "Student Lounge" som du kommer till när du loggat in med ditt personliga användarnamn. Du kan inte bli underkänd på dessa prov, utan misslyckas du med något prov så är det bara att göra om tills du får alla rätt.

Slutproven består av tre slumpmässigt genererade frågor som rättas automatiskt av datorn. Här ska du kunna lösa ett problem på papper och skriva in rätt svar på skärmen. *Du måste svara rätt på samtliga tre frågor i följd för att bli godkänd.*

Om du svarat fel på någon fråga kan du göra ett nytt försök. Du får nu tre nya varianter på frågorna som du ska lösa (även om du skulle ha klarat någon eller några av de tidigare frågorna ska du alltså klara alla tre frågor i denna omgång på nytt). Tänk på att det är ditt senaste resultat som registreras i studiestatistiken.

1.1 Inledning till derivata

Innehåll:

- Derivatans definition (översiktligt).
- Derivatan av x^α, $\ln x$, e^x, $\cos x$, $\sin x$ och $\tan x$.
- Derivata av summa och differens.
- Tangent och normal till kurvor.

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Förstå derivatan $f'(a)$ som lutningen av kurvan $y = f(x)$ i punkten $x = a$.
- Förstå derivatan som den momentana ändringstakten av en storhet (exempelvis fart, prisökning, osv.).
- Veta att det finns funktioner som inte är deriverbara (t.ex. $f(x) = |x|$ i $x = 0$).
- Kunna derivera x^α, $\ln x$, e^x, $\cos x$, $\sin x$ och $\tan x$ samt summor/differenser av sådana termer.
- Kunna bestämma tangent och normal till kurvan $y = f(x)$.
- Veta att derivatan kan betecknas med $f'(x)$ och $df/dx(x)$.

Inledning

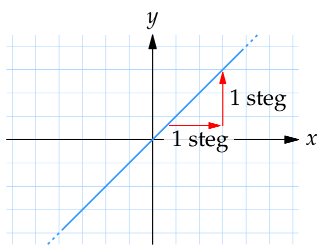
När man studerar matematiska funktioner och deras grafer är ett av de viktigaste områdena studiet av en funktions förändring, dvs. om en funktion ökar eller minskar samt i vilken takt detta sker.

Man använder sig här av begreppet förändringsgrad (eller förändringshastighet), vilket är ett mått på hur funktionens värde (y) ändras för varje enhets ökning av variabelvärdet (x). Om man känner till två punkter på en funktions graf kan man få ett mått på funktionens förändringsgrad mellan dessa punkter genom att beräkna ändringskvoten

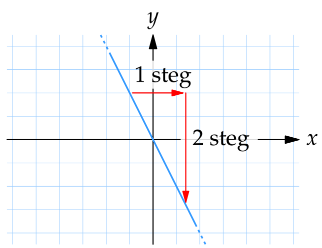
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{skillnad i } y\text{-led}}{\text{skillnad i } x\text{-led}}$$

Exempel 1

De linjära funktionerna $f(x) = x$ respektive $g(x) = -2x$ förändras på samma sätt hela tiden. Deras förändringsgrad är 1 resp. -2, vilket vi känner till som linjernas respektive riktningskoefficient.



Grafen till $f(x) = x$ har riktningskoefficient 1



Grafen till $g(x) = -2x$ har riktningskoefficient -2

För en linjär funktion gäller alltså att funktionens förändringsgrad är samma som linjens riktningskoefficient.

Om man har en funktion där funktionsvärdet förändras med tiden är det naturligt att använda begreppet förändringshastighet, eftersom förändringsgraden här anger hur funktionsvärdet ändras per tidsenhet.

Om en bil rör sig med hastigheten 80 km/h så kan den tillryggalagda sträckan, s km, efter t timmar beskrivas med funktionen $s(t) = 80t$. Funktionens förändringsgrad anger hur funktionsvärdet ändras per timme, vilket naturligtvis är detsamma som bilens hastighet, 80 km/h.

För icke-linjära funktioner gäller ju att lutningen på funktionskurvan ändras hela tiden och därmed också funktionens förändringsgrad. För att bestämma hur en sådan funktion förändras kan vi antingen ange funktionens genomsnittliga förändring (medelförändringen) mellan två punkter på funktionskurvan, eller den momentana förändringsgraden i en punkt på kurvan.

Exempel 2

För funktionen $f(x) = 4x - x^2$ är $f(1) = 3$, $f(2) = 4$ och $f(4) = 0$.

a) Medelförändringen (medellutningen) från $x = 1$ till $x = 2$ är

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 3}{1} = 1,$$

och funktionen ökar i detta intervall.

b) Medelförändringen från $x = 2$ till $x = 4$ är

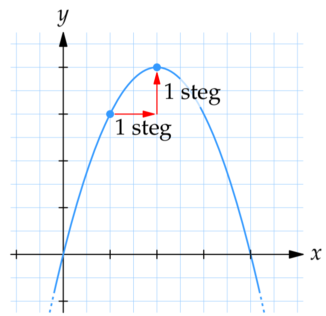
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{0 - 4}{2} = -2,$$

och funktionen avtar i detta intervall.

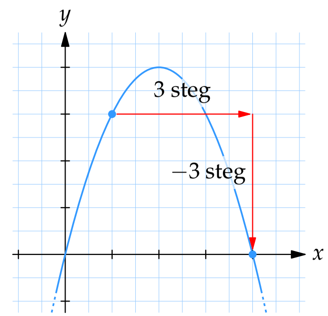
c) Mellan $x = 1$ och $x = 4$ är medelförändringen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{0 - 3}{3} = -1.$$

I genomsnitt är funktionen avtagande i detta intervall, även om funktionen både växer och avtar i intervallet.



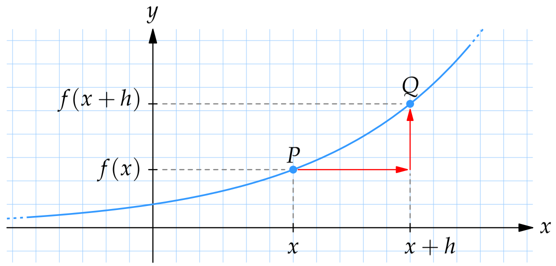
Mellan $x = 1$ och $x = 2$ har funktionen medelförändringen $1/1 = 1$



Mellan $x = 1$ och $x = 4$ har funktionen medelförändringen $(-3)/3 = -1$

Derivatans definition

För att beräkna den momentana förändringsgraden hos en funktion, dvs. funktionskurvans lutning i en punkt P, tar vi temporärt hjälp av ytterligare en punkt Q i närheten av P och bildar ändringskvoten mellan P och Q:



Ändringskvoten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Om vi låter Q närma sig P (dvs. låter $h \to 0$) så kan vi lista ut vad värdet blir om punkterna sammanfaller och därmed få fram lutningen i punkten P. Vi kallar detta värde för *derivatan* av $f(x)$ i punkten P, vilket kan tolkas som den momentana förändringsgraden av $f(x)$ i punkten P.

Derivatan av en funktion $f(x)$ betecknas $f'(x)$ och kan formellt definieras så här:

Derivatan av en funktion $f(x)$, definieras som

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Om $f'(x_0)$ existerar, säger man att $f(x)$ är *deriverbar* i punkten $x = x_0$.

Olika symboler för derivatan förekommer, t.ex.

Funktion	Derivata
$f(x)$	$f'(x)$
y	y'
y	Dy
y	$\frac{dy}{dx}$
$s(t)$	$\dot{s}(t)$

Derivatans tecken

Derivatans tecken $(+/-)$ visar oss om funktionens graf lutar uppåt eller nedåt, dvs. om funktionen är växande eller avtagande:

- $f'(x) > 0$ (positiv lutning) medför att $f(x)$ är växande.
- $f'(x) < 0$ (negativ lutning) medför att $f(x)$ är avtagande.
- $f'(x) = 0$ (ingen lutning) medför att $f(x)$ är stationär (horisontell).

Exempel 3

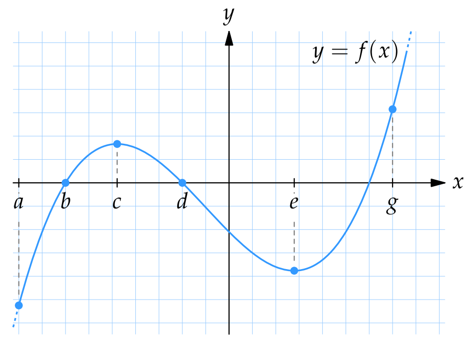
a) $f(2) = 3$ betyder att **funktionens värde** är 3 när $x = 2$.

b) $f'(2) = 3$ betyder att **derivatans värde** är 3 när $x = 2$, vilket i sin tur betyder att funktionens graf har lutningen 3 när $x = 2$.

Exempel 4

I figuren kan man utläsa att

$f'(a) > 0$
$f(b) = 0$
$f'(c) = 0$
$f(d) = 0$
$f'(e) = 0$
$f(e) < 0$
$f'(g) > 0$



Notera betydelsen av $f(x)$ respektive $f'(x)$.

Exempel 5

Temperaturen i en termos beskrivs av en funktion, där $T(t)$ är temperaturen i termosen efter t minuter. Skriv följande med matematiska symboler:

a) Efter 10 minuter är temperaturen 80°.

$T(10) = 80$

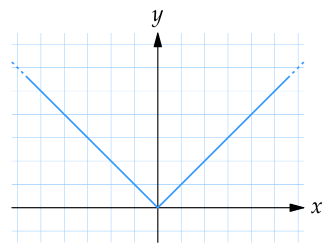
b) Efter 2 minuter sjunker temperaturen i termosen med 3° per minut.

$T'(2) = -3$ (temperaturen är avtagande, varför derivatan är negativ)

Exempel 6

Funktionen $f(x) = |x|$ saknar derivata då $x = 0$. Man kan nämligen inte bestämma hur funktionens graf lutar i punkten $(0, 0)$ (se figuren nedan).

Man kan uttrycka detta på exempelvis något av följande sätt: "$f'(0)$ existerar inte", "$f'(0)$ är ej definerad" eller "$f(x)$ är inte deriverbar i $x = 0$".



Grafen till funktionen $f(x) = |x|$

Deriveringsregler

Med hjälp av derivatans definition kan man bestämma derivatan för de vanliga funktionstyperna.

Exempel 7

Om $f(x) = x^2$ så får vi enligt definitionen av derivata ändringskvoten

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h.$$

Om vi sedan låter h gå mot noll så ser vi att lutningen i punkten blir $2x$. Vi har därmed visat att lutningen i en godtycklig punkt på kurvan $y = x^2$ är $2x$, dvs. derivatan av x^2 är $2x$.

På liknande sätt kan man härleda allmänna deriveringsregler:

Funktion	Derivata
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$

Dessutom gäller för summor och differenser av funktionsuttryck att

$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x).$$

Samt, om k är en konstant, att

$$D(k \cdot f(x)) = k \cdot f'(x).$$

Exempel 8

a) $D(2x^3 - 4x + 10 - \sin x) = 2\,Dx^3 - 4\,Dx + D10 - D\sin x$
$= 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 1 + 0 - \cos x$

b) $y = 3\ln x + 2e^x$ ger att $y' = 3 \cdot \dfrac{1}{x} + 2e^x = \dfrac{3}{x} + 2e^x$.

c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3x^2}{5} - \dfrac{x^3}{2}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\tfrac{3}{5}x^2 - \tfrac{1}{2}x^3\right) = \tfrac{3}{5} \cdot 2x - \tfrac{1}{2} \cdot 3x^2 = \tfrac{6}{5}x - \tfrac{3}{2}x^2$.

d) $s(t) = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$ ger att $s'(t) = v_0 + \dfrac{2at}{2} = v_0 + at$.

Exempel 9

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ ger att $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2} = \tfrac{1}{3}x^{-2}$ ger att $f'(x) = \tfrac{1}{3} \cdot (-2)x^{-3} = -\tfrac{2}{3} \cdot x^{-3} = -\dfrac{2}{3x^3}$.

c) $g(t) = \dfrac{t^2 - 2t + 1}{t} = t - 2 + \dfrac{1}{t}$ ger att $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$.

d) $y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^4 + 2x + x^{-2}$

ger att $\quad y' = 4x^3 + 2 - 2x^{-3} = 4x^3 + 2 - \dfrac{2}{x^3}\,.$

Exempel 10

Funktionen $f(x) = x^2 + x^{-2}$ har derivatan

$$f'(x) = 2x^1 - 2x^{-3} = 2x - \frac{2}{x^3}.$$

Detta betyder exempelvis att $f'(2) = 2 \cdot 2 - 2/2^3 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ och att $f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 2/(-1)^3 = -2 + 2 = 0$. Däremot är derivatan $f'(0)$ inte definierad.

Exempel 11

Ett föremål rör sig enligt $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$, där $s(t)$ km är avståndet från startpunkten efter t timmar. Beräkna $s'(3)$ och förklara vad värdet står för.

Tidsderivatan ges av

$$s'(t) = 3t^2 - 8t + 5 \qquad \text{vilket ger att} \qquad s'(3) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 5 = 8.$$

Detta kan tolkas som att efter 3 timmar är föremålets hastighet 8 km/h.

Exempel 12

Totalkostnaden T kr för tillverkning av x gummidräkter ges av funktionen

$$T(x) = 40000 + 370x - 0{,}09x^2 \quad \text{för } 0 \le x \le 200.$$

Beräkna och förklara innebörden av nedanstående uttryck.

a) $T(120)$

$T(120) = 40000 + 370 \cdot 120 - 0{,}09 \cdot 120^2 = 83104$. Totalkostnaden för att tillverka 120 gummidräkter är 83104 kr.

b) $T'(120)$

Derivatan ges av $T'(x) = 370 - 0{,}18x$ och därför är

$$T'(120) = 370 - 0{,}18 \cdot 120 \approx 348.$$

Marginalkostnaden (”kostnaden för att tillverka ytterligare 1 enhet”) vid 120 tillverkade gummidräkter är approximativt 348 kr.

Tangenter och normaler

En *tangent* till en kurva är en rät linje som tangerar kurvan. En *normal* till en kurva är en rät linje som är vinkelrät mot kurvan i en viss punkt på kurvan (och därmed också vinkelrät mot kurvans tangent i denna punkt).

För vinkelräta linjer gäller att produkten av deras riktningskoefficienter är -1, dvs. om tangentens riktningskoefficient betecknas k_T och normalens k_N så är $k_T \cdot k_N = -1$. Eftersom vi kan bestämma lutningen på en kurva med hjälp av derivatan så kan vi också bestämma ekvationen för en tangent eller en normal om vi känner till funktionsuttrycket för kurvan.

Exempel 13

Bestäm ekvationen för tangenten respektive normalen till kurvan $y = x^2 + 1$ i punkten $(1, 2)$.

Vi skriver tangentens ekvation som $y = kx + m$. Eftersom den ska tangera kurvan i $x = 1$ har vi att dess lutning ges av $k = y'(1)$, dvs.

$$y' = 2x, \qquad y'(1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Tangentlinjen ska också passerar genom punkten $(1, 2)$ och därför måste $(x, y) = (1, 2)$ uppfylla tangentens ekvation

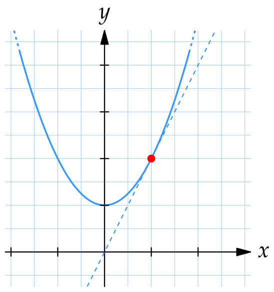
$$2 = 2 \cdot 1 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = 0.$$

Tangentens ekvation är alltså $y = 2x$.

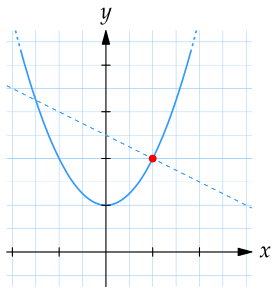
Riktningskoefficienten för normalen är $k_N = -1/k_T = -1/2$. Vidare går normalen också genom punkten $(1, 2)$, dvs.

$$2 = -\tfrac{1}{2} \cdot 1 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = \tfrac{5}{2}.$$

Normalen har ekvationen $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{5 - x}{2}$.



Tangentlinjen $y = 2x$



Normallinjen $y = (5 - x)/2$

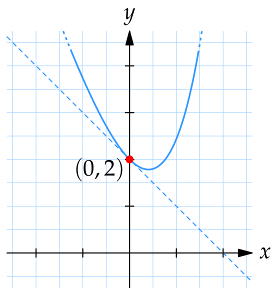
Exempel 14

Kurvan $y = 2\,e^x - 3x$ har en tangent vars riktningskoefficient är -1. Bestäm tangeringspunkten.

Derivatan av högerledet är $y' = 2\,e^x - 3$ och i tangeringspunkten ska derivatan vara lika med -1, dvs. $y' = -1$, och detta ger oss ekvationen

$$2\,e^x - 3 = -1$$

som har lösningen $x = 0$. I punkten $x = 0$ har kurvan y-värdet $y(0) = 2\,e^0 - 3 \cdot 0 = 2$ och därmed är tangeringspunkten $(0, 2)$.



1.1 Övningar

Övning 1.1:1

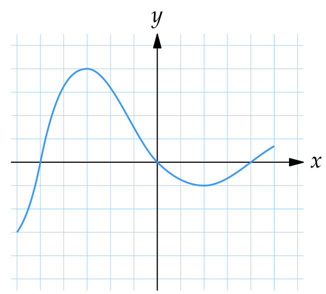
Grafen till $f(x)$ är ritad i figuren.

a) Vilket tecken har $f'(-5)$ respektive $f'(1)$?

b) För vilka x-värden är $f'(x) = 0$?

c) I vilket eller vilka intervall är $f'(x)$ negativ?

(En ruta i figurens rutnät har längd och höjd 1.)



Övning 1.1:2

Bestäm $f'(x)$ om

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ b) $f(x) = \cos x - \sin x$ c) $f(x) = e^x - \ln x$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ e) $f(x) = (x^2 - 1)^2$ f) $f(x) = \cos(x + \pi/3)$

Övning 1.1:3

En liten boll som släpps från höjden $h = 10$ m ovanför marken vid tidpunkten $t = 0$, har vid tiden t (mätt i sekunder) höjden $h(t) = 10 - 9{,}82t^2/2$. Vilken fart har bollen när den slår i backen?

Övning 1.1:4

Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $y = x^2$ i punkten $(1, 1)$.

Övning 1.1:5

Bestäm alla punkter på kurvan $y = -x^2$ som har en tangent som går genom punkten $(1, 1)$.

1.2 Deriveringsregler

Innehåll:

- Derivata av en produkt och kvot
- Derivata av en sammansatt funktion (kedjeregeln)
- Högre ordningars derivata

Färdigheter:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- I princip kunna derivera vilken elementär funktion som helst.

Derivering av produkt och kvot

Med hjälp av derivatans definition kan man också härleda deriveringsregler för produkter och kvoter av funktionsuttryck:

Deriveringsregler för produkter och kvoter:

$$D\,\big(f(x)\cdot g(x)\big) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$
$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

(Observera att derivering av produkter och kvoter **inte** är så enkelt som derivering av summor och differenser, där man kan derivera funktionsuttrycken termvis, dvs. var för sig!)

Exempel 1

a) $D\,(x^2e^x) = 2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x = (2x+x^2)\,e^x$

b) $D\,(x\sin x) = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \sin x + x\cos x$

c) $D\,(x\ln x - x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

d) $D\,\tan x = D\,\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2}$
$\quad = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

e) $D\,\dfrac{1+x}{\sqrt{x}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{x} - (1+x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{x}{2\sqrt{x}}}{x}$
$\quad = \dfrac{\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

f) $D\,\dfrac{x\,e^x}{1+x} = \dfrac{(1\cdot e^x + x\cdot e^x)(1+x) - x\,e^x\cdot 1}{(1+x)^2}$
$\quad = \dfrac{e^x + x\,e^x + x\,e^x + x^2\,e^x - x\,e^x}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x+x^2)\,e^x}{(1+x)^2}$

Derivering av sammansatta funktioner

En funktion $y = f(g)$ där variabeln g i sin tur är beroende av en variabel x får formen $y = f\big(g(x)\big)$ och kallas sammansatt funktion. Om man deriverar en sammansatt funktion med avseende på den oberoende variabeln x, använder man följande regel:

$$y'(x) = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x).$$

Denna regel brukar kallas kedjeregeln och kan beroende på val av symboler skrivas på olika sätt. Om vi i ovanstående t.ex. sätter $y = f(u)$ och $u = g(x)$ kan kedjeregeln skrivas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Man brukar säga att den sammansatta funktionen y består av den *yttre* funktionen f och den *inre* funktionen g. Analogt kallas f' för den *yttre derivatan* och g' den *inre derivatan*.

Exempel 2

För funktionen $y = (x^2+2x)^4$ är

$y = u^4$ yttre funktionen, och $u = x^2 + 2x$ inre funktionen,

$\dfrac{dy}{du} = 4u^3$ yttre derivata, och $\dfrac{du}{dx} = 2x + 2$ inre derivata.

Derivatan av funktionen y med avseende på x blir enligt kedjeregeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot (2x+2) = 4(x^2+2x)^3 \cdot (2x+2).$$

När man vant sig vid kedjeregeln inför man sällan nya beteckningar för yttre och inre funktion, utan man lär sig känna igen dessa och deriverar ”rakt på”, enligt mönstret

$$(\text{yttre derivata}) \cdot (\text{inre derivata}).$$

Kom ihåg att även använda produkt- eller kvotregeln när detta är nödvändigt.

Exempel 3

a) $f(x) = \sin(3x^2+1)$

Yttre derivatan: $\cos(3x^2+1)$

Inre derivatan: $6x$

$f'(x) = \cos(3x^2+1) \cdot 6x = 6x\cos(3x^2+1)$

b) $y = 5\,e^{x^2}$

Yttre derivatan: $5\,e^{x^2}$

Inre derivatan: $2x$

$y' = 5e^{x^2} \cdot 2x = 10x\,e^{x^2}$

c) $f(x) = e^{x\cdot \sin x}$

Yttre derivatan: $e^{x\cdot \sin x}$

Inre derivatan: $1 \cdot \sin x + x\cos x$

$f'(x) = e^{x\cdot \sin x}(\sin x + x\cos x)$

d) $s(t) = t^2\cos(\ln t)$

$s'(t) = 2t \cdot \cos(\ln t) + t^2 \cdot \left(-\sin(\ln t) \cdot \dfrac{1}{t}\right) = 2t\cos(\ln t) - t\sin(\ln t)$

e) $D\,a^x = D\left(e^{\ln a}\right)^x = D\,e^{\ln a\cdot x} = e^{\ln a \cdot x} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

f) $D\,x^a = D\left(e^{\ln x}\right)^a = D\,e^{a\cdot \ln x} = e^{a\cdot\ln x} \cdot a \cdot \dfrac{1}{x} = x^a \cdot a \cdot x^{-1} = ax^{a-1}$

Kedjeregeln kan även användas upprepade gånger på en funktion som är sammansatt i flera steg. Exempelvis funktionen $y = f\big(g(h(x))\big)$ har derivatan

$$y' = f'\big(g(h(x))\big) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Exempel 4

a) $$\begin{aligned} D\,\sin^3 2x &= D\,(\sin 2x)^3 = 3(\sin 2x)^2 \cdot D\,\sin 2x = 3(\sin 2x)^2 \cdot \cos 2x \cdot D\,(2x) \\ &= 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6\sin^2 2x\,\cos 2x \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} D\,\sin\big((x^2-3x)^4\big) &= \cos\big((x^2-3x)^4\big) \cdot D\,(x^2-3x)^4 \\ &= \cos\big((x^2-3x)^4\big) \cdot 4(x^2-3x)^3 \cdot D\,(x^2-3x) \\ &= \cos\big((x^2-3x)^4\big) \cdot 4(x^2-3x)^3 \cdot (2x-3) \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} D\,\sin^4(x^2-3x) &= D\,\big(\sin(x^2-3x)\big)^4 \\ &= 4\sin^3(x^2-3x) \cdot D\,\sin(x^2-3x) \\ &= 4\sin^3(x^2-3x) \cdot \cos(x^2-3x) \cdot D(x^2-3x) \\ &= 4\sin^3(x^2-3x) \cdot \cos(x^2-3x) \cdot (2x-3) \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} D\left(e^{\sqrt{x^3-1}}\right) &= e^{\sqrt{x^3-1}} \cdot D\,\sqrt{x^3-1} = e^{\sqrt{x^3-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3-1}} \cdot D\,(x^3-1) \\ &= e^{\sqrt{x^3-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3-1}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2 e^{\sqrt{x^3-1}}}{2\sqrt{x^3-1}} \end{aligned}$$

Derivator av högre ordningar

Om en funktion är deriverbar mer än en gång så pratar man om funktionens andra-, tredjederivata, osv.

Andraderivatan brukar betecknas f'' (läses ”f-biss”), medan tredje-, fjärdederivatan, etc., betecknas $f^{(3)}, f^{(4)}$ osv.

Även beteckningarna $D^2 f, D^3 f, \ldots$, och $\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ är vanliga.

Exempel 5

a) $f(x) = 3\,e^{x^2-1}$

$$f'(x) = 3\,e^{x^2-1} \cdot D\,(x^2-1) = 3\,e^{x^2-1} \cdot 2x = 6x\,e^{x^2-1}$$
$$f''(x) = 6\,e^{x^2-1} + 6x\,e^{x^2-1} \cdot 2x = 6\,e^{x^2-1}\,(1+2x^2)$$

b) $y = \sin x\, \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x\, \cos x + \sin x\,(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\cos x\,(-\sin x) - 2\sin x \cos x = -4\sin x \cos x$$

c) $D\,(e^x \sin x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

$$\begin{aligned} D^2(e^x \sin x) &= D\,\big(e^x(\sin x + \cos x)\big) \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2\,e^x \cos x \\ D^3(e^x \sin x) &= D\,(2\,e^x \cos x) \\ &= 2\,e^x \cos x + 2\,e^x(-\sin x) = 2\,e^x(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

1.2 Övningar

Övning 1.2:1

Beräkna derivatan av följande funktioner och förenkla svaret så långt som möjligt

a) $\cos x \cdot \sin x$	b) $x^2 \ln x$	c) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$
d) $\dfrac{\sin x}{x}$	e) $\dfrac{x}{\ln x}$	f) $\dfrac{x \ln x}{\sin x}$

Övning 1.2:2

Beräkna derivatan av följande funktioner och förenkla svaret så långt som möjligt

a) $\sin x^2$	b) e^{x^2+x}	c) $\sqrt{\cos x}$
d) $\ln\ln x$	e) $x(2x+1)^4$	f) $\cos\sqrt{1-x}$

Övning 1.2:3

Beräkna derivatan av följande funktioner och förenkla svaret så långt som möjligt

a) $\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\,)$	b) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$	c) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
d) $\sin\cos\sin x$	e) $e^{\sin x^2}$	f) $x^{\tan x}$

Övning 1.2:4

Beräkna andraderivatan av följande funktioner och förenkla svaret så långt som möjligt

a) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	b) $x(\sin\ln x + \cos\ln x)$

1.3 Max- och minproblem

Innehåll:

- Kurvskissering
- Max- och minproblem

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Kunna definitionen av strängt växande funktion, strängt avtagande funktion, lokalt maximum, lokalt minimum, globalt maximum, globalt minimum.
- Veta att om $f' > 0$ i ett intervall så är f strängt växande i intervallet, och att om $f' < 0$ i ett intervall så är f strängt avtagande i intervallet.
- Kunna bestämma lokala max- och minpunkter samt terasspunkter genom teckenstudium av derivatan.
- Kunna skissera funktionsgrafer genom att göra en teckentabell över derivatan.
- Kunna bestämma globala och lokala max- och minpunkter genom 1) teckenstudium av derivatan, 2) punkter där funktionen inte är deriverbar, 3) ändpunkter till definitionsmängden.
- Kunna avgöra lokala max- och minpunkter med tecknet på andraderivatan.

Växande och avtagande

Begreppen växande och avtagande känns kanske självklara när man pratar om matematiska funktioner; om funktionen är växande så lutar grafen uppåt och om den är avtagande så lutar grafen nedåt.

De matematiska definitionerna är följande:

- En funktion är växande i ett intervall om för alla x_1 och x_2 inom intervallet gäller att
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2).$$
- En funktion är avtagande i ett intervall om för alla x_1 och x_2 inom intervallet gäller att
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2).$$

Med vardagligt språk säger alltså definitionen av t.ex. växande funktion att för ett x-värde till höger på x-axeln är funktionsvärdet minst lika stort som för ett x-värde till vänster. Lägg märke till att denna definition innebär att en funktion kan vara konstant i ett intervall och ändå vara växande eller avtagande. En funktion som är konstant i hela det aktuella intervallet är enligt definitionen både växande och avtagande.

Om man vill utesluta möjligheten att en växande/avtagande funktion är konstant på ett intervall talar man i stället om *strängt* växande och *strängt* avtagande funktioner:

- En funktion är *strängt* växande i ett intervall om för alla x_1 och x_2 inom intervallet gäller att
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$
- En funktion är *strängt* avtagande i ett intervall om för alla x_1 och x_2 inom intervallet gäller att
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

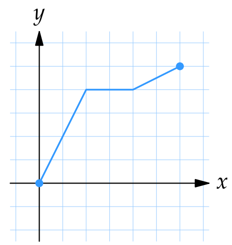
(En strängt växande/avtagande funktion får alltså inte vara konstant i någon del av intervallet.)

Exempel 1

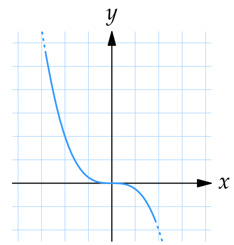
a) Funktionen $y = f(x)$ vars graf ges av figuren nedan längst till vänster är växande i intervallet $0 \le x \le 6$.

b) Funktionen $y = -x^3/4$ är en strängt avtagande funktion.

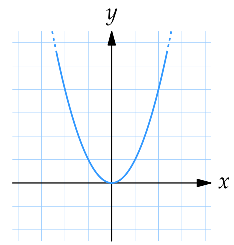
c) Funktionen $y = x^2$ är strängt växande för $x \ge 0$.



Grafen till funktionen i uppgift a



Grafen till funktionen $f(x) = -x^3/4$



Grafen till funktionen $f(x) = x^2$

Derivatan kan givetvis användas för att undersöka om en funktion är växande eller avtagande. Vi har att

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ är (strängt) växande.}$$
$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ är (strängt) avtagande.}$$

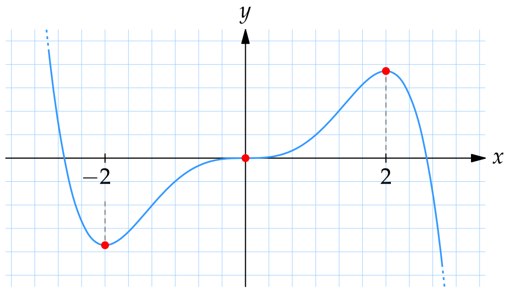
Observera att även enstaka **punkter** där $f'(x) = 0$ kan ingå i ett strängt växande eller avtagande intervall.

Kritiska punkter

Punkter där $f'(x) = 0$ kallas kritiska (eller stationära) punkter och är vanligtvis av tre olika slag:

- Lokal maximipunkt med $f'(x) > 0$ till vänster, och $f'(x) < 0$ till höger om punkten.
- Lokal minimipunkt med $f'(x) < 0$ till vänster, och $f'(x) > 0$ till höger om punkten.
- Terrasspunkt med $f'(x) < 0$ eller $f'(x) > 0$ på båda sidor om punkten.

Observera att en punkt kan vara en lokal maximi- eller minimipunkt utan att $f'(x) = 0$; läs mer i avsnittet om *max- och minpunkter*.



Funktionen i figuren ovan har en lokal minimipunkt för $x = -2$, terrasspunkt för $x = 0$ och lokal maximipunkt för $x = 2$.

Teckentabell

Genom att studera derivatans tecken (+, − eller 0) kan vi alltså få en bra uppfattning om kurvans utseende.

Detta utnyttjar man i en s.k. *teckentabell*. Man bestämmer först de x-värden där $f'(x) = 0$ och beräknar sedan derivatans tecken på båda sidor om dessa. Med hjälp av en eller annan ”stödpunkt” på kurvan kan man dessutom utifrån teckentabellen skissera kurvan på ett ofta godtagbart sätt.

Exempel 2

Gör en teckentabell över derivatan av funktionen $f(x) = x^3 - 12x + 6$ och skissera därefter funktionens graf.

Funktionens derivata ges av

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2).$$

Faktorn $x - 2$ är negativ till vänster om $x = 2$ och positiv till höger om $x = 2$. På samma sätt är faktorn $x + 2$ negativ till vänster om $x = -2$ och positiv till höger om $x = -2$. Denna information kan vi också sammanfatta i en tabell:

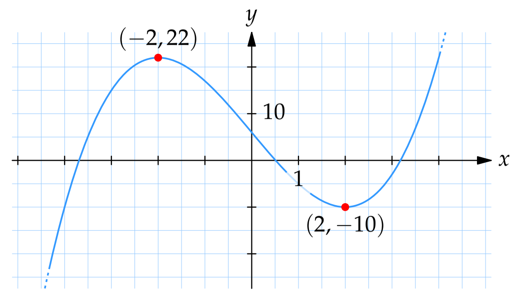
x		-2		2	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Eftersom derivatan är produkten av $x - 2$ och $x + 2$ så kan vi bestämma derivatans tecken utifrån faktorernas tecken och ställa upp följande tabell över derivatans tecken på tallinjen:

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	22	$\searrow$	-10	$\nearrow$

I tabellens sista rad har vi skrivit ut pilar som visar om funktionen är strängt växande ($\nearrow$) eller strängt avtagande ($\searrow$) i respektive intervall samt funktionens värde i de kritiska punkterna $x = -2$ och $x = 2$.

Från diagrammet ser vi att $f(x)$ har en lokal maximipunkt i $(-2, 22)$ och en lokal minimipunkt i $(2, -10)$. Grafen kan nu skissas:



Max- och minpunkter (extrempunkter)

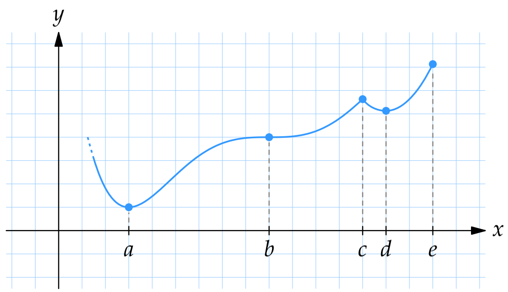
Punkter där en funktion antar sitt största eller minsta värde i jämförelse med omgivningen kallas för *lokala maximi-* eller *minimipunkter* (förkortas ofta max- och minpunkter). Med ett gemensamt namn kallas dessa punkter för *extrempunkter*.

En extrempunkt kan uppträda i tre olika slags punkter:

- I en kritisk punkt (där $f'(x) = 0$).
- I en punkt där derivatan inte existerar (s.k. *singulär punkt*).
- I en ändpunkt till definitionsmängden.

Exempel 3

Funktionen nedan har fyra extrempunkter: maxpunkter i $x = c$ och $x = e$, och minpunkter i $x = a$ och $x = d$.



I $x = a$, $x = b$ och $x = d$ är $f'(x) = 0$, men det är endast i $x = a$ och $x = d$ som vi har extrempunkter, eftersom $x = b$ är en terrasspunkt.

I $x = c$ är inte derivatan definierad (eftersom det är en spets, eller hörn, på kurvan och lutningen inte går att bestämma). Punkten $x = e$ är en ändpunkt.

När man letar efter extrempunkter hos en funktion gäller det alltså att ta reda på och undersöka alla tänkbara kandidater av punkter. En lämplig arbetsgång är:

1. Derivera funktionen.
2. Kontrollera om det finns några punkter där $f'(x)$ inte är definierad.
3. Bestäm alla punkter där $f'(x) = 0$.
4. Gör en teckentabell för att få fram alla extrempunkter.
5. Beräkna funktionsvärdet i alla extrempunkter, samt i eventuella ändpunkter.

Exempel 4

Bestäm alla extrempunkter på kurvan $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$.

Funktionens derivata ges av

$$y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2).$$

För att bestämma hur derivatans tecken varierar över tallinjen försöker vi faktorisera derivatan så långt som möjligt. Vi har redan lyckats bryta ut faktorn $12x$ och vi kan faktorisera det återstående uttrycket $x^2 + x - 2$ ytterligare genom att hitta dess nollställen

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \text{eller} \quad x = 1.$$

Detta betyder att $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ och hela derivatan kan skrivas som

$$y' = 12x(x+2)(x-1).$$

Det går direkt ur denna formel att se att derivatan är noll för $x = -2$, $x = 0$ och $x = 1$. Dessutom kan vi se hur derivatans tecken varierar genom att undersöka tecknet för varje enskild faktor i produkten för olika värden på x

x		-2		0		1	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Derivatan är produkten av dessa faktorer och vi får derivatans tecken genom att multiplicera ihop faktorernas tecken i respektive intervall.

x		-2		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	12	$\searrow$	7	$\nearrow$

Kurvan har alltså lokala minpunkter i $(-2, -20)$ och $(1, 7)$ samt lokal maxpunkt i $(0, 12)$.

Exempel 5

Bestäm alla extrempunkter på kurvan $y = x - x^{2/3}$.

Derivatan av funktionen ges av

$$y' = 1 - \tfrac{2}{3}x^{-1/3} = 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Från detta uttryck ser vi att y' inte är definierad för $x = 0$ (vilket dock y är). Detta betyder att funktionen har en singulär punkt i $x = 0$.

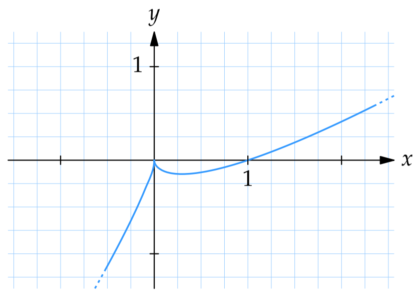
De kritiska punkterna till funktionen ges av

$$y' = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[3]{x} = \tfrac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \tfrac{8}{27}.$$

De enda punkter där funktionen eventuellt kan ha extrempunkter är alltså $x = 0$ och $x = \frac{8}{27}$. För att avgöra dessa punkters karaktär skriver vi upp en teckentabell:

x		0		$\frac{8}{27}$	
y'	$+$	ej def.	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$

Kurvan har alltså en lokal maximipunkt i $(0,0)$ (en spets) och en lokal minimipunkt i $\left(\frac{8}{27}, -\frac{4}{27}\right)$.



Absolut min/max

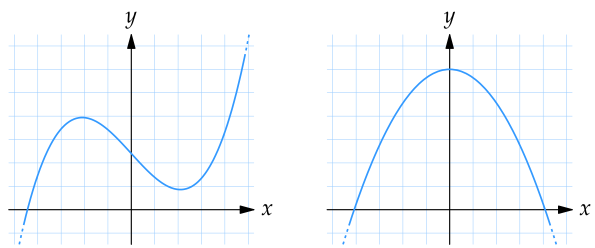
En funktion har ett *absolut* (eller *globalt*) maximum (minimum) i en punkt om funktionsvärdet inte är större (mindre) i någon annan punkt i hela definitionsmängden.

Ofta kallar man också detta för funktionens största (minsta) värde.

För att bestämma en funktions absoluta max. eller min. så måste man alltså hitta alla extrempunkter och beräkna funktionsvärdena i dessa. Om definitionsmängden har ändpunkter måste man givetvis också undersöka funktionens värde i dessa punkter.

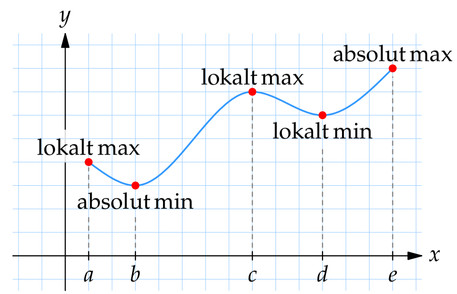
Observera att en funktion kan sakna såväl absolut max. som absolut min. Notera också att en funktion kan ha flera lokala extrempunkter utan att ha ett globalt max. eller min.

Exempel 6



I den första figuren saknar funktionen såväl globalt maximum som globalt minimum. I den andra figuren saknar funktionen globalt minimum.

I tillämpningar ger omständigheterna ofta en begränsad definitionsmängd, dvs. man betraktar endast en del av funktionens graf. Man måste därför vara vaksam på att ett globalt max. eller min. mycket väl kan ligga i intervallets ändpunkter.



Funktionen ovan betraktas endast i intervallet $a \le x \le e$. Vi ser att funktionens minsta värde i detta intervall inträffar i den kritiska punkten $x = b$, medan största värdet återfinns i ändpunkten $x = e$.

Exempel 7

Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 2$ i intervallet $-0{,}5 \leq x \leq 1$.

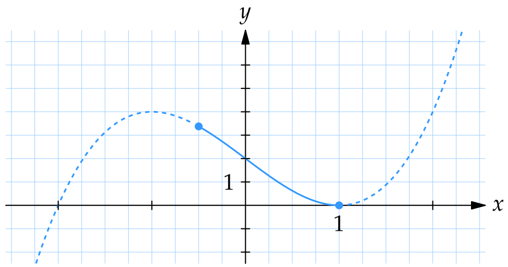
Vi deriverar funktionen, $f'(x) = 3x^2 - 3$, och sätter derivatan lika med noll för att få fram alla kritiska punkter

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Punkten $x = -1$ ligger dock utanför den aktuella definitionsmängden och $x = 1$ sammanfaller med definitionsmängdens ena ändpunkt. Eftersom funktionen saknar singulära punkter (funktionen är deriverbar överallt) måste funktionens största och minsta värde antas i intervallets ändpunkter,

$$f(-0{,}5) = 3{,}375,$$
$$f(1) = 0.$$

Funktionens största värde i det givna intervallet är alltså 3,375. Minsta värdet är 0 (se figuren).



Figuren visar funktionens hela graf streckad, med den del som ligger inom det givna intervallet heldragen.

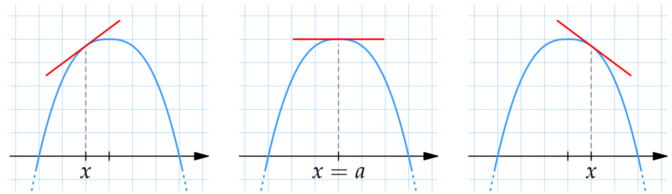
Andraderivatan

Tecknet på derivatan av en funktion ger oss information om huruvida funktionen är växande eller avtagande. På samma sätt kan andraderivatans tecken visa om förstaderivatan är växande eller avtagande. Detta kan man bl.a. utnyttja för att ta reda på om en given extrempunkt är en max-, eller minpunkt.

Om funktionen $f(x)$ har en kritisk punkt i $x = a$ där $f''(a) < 0$, då gäller att

1. Derivatan $f'(x)$ är strängt avtagande i en omgivning kring $x = a$.

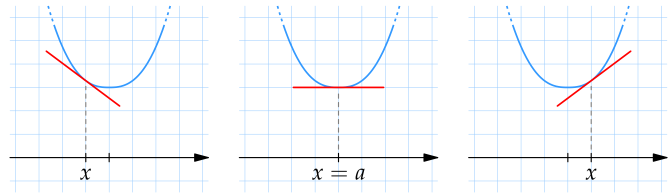
2. Eftersom $f'(a) = 0$ är alltså $f'(x) > 0$ till vänster om $x = a$ och $f'(x) < 0$ till höger om $x = a$.
3. Detta medför att funktionen $f(x)$ har en lokal maximipunkt i $x = a$.



Om derivatan är positiv till vänster om $x = a$ och negativ till höger om $x = a$ så har funktionen ett lokalt maximum i $x = a$.

Om funktionen $f(x)$ har en kritisk punkt i $x = a$ där $f''(a) > 0$, då gäller att

1. Derivatan $f'(x)$ är strängt växande i en omgivning kring $x = a$.
2. Eftersom $f'(a) = 0$ är alltså $f'(x) < 0$ till vänster om $x = a$ och $f'(x) > 0$ till höger om $x = a$.
3. Detta medför att funktionen $f(x)$ har en lokal minimipunkt i $x = a$.



Om derivatan är negativ till vänster om $x = a$ och positiv till höger om $x = a$ så har funktionen ett lokalt minimum i $x = a$.

Om $f''(a) = 0$, får vi ingen information utan ytterligare undersökning krävs, t.ex. teckentabell.

Exempel 8

Bestäm alla extrempunkter för funktionen $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ och bestäm deras karaktär med hjälp av andraderivatan.

Funktionen är ett polynom och är därför deriverbar överallt. Om funktionen har några extrempunkter så måste de därför finnas bland de kritiska punkterna. Vi deriverar därmed funktionen, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, och sätter derivatan lika med noll

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{eller} \quad x = -\tfrac{1}{3}.$$

Funktionen har kritiska punkter i $x = 1$ och $x = -\frac{1}{3}$. Med hjälp av tecknet på andraderivatan $f''(x) = 6x - 2$ kan vi bestämma vilken typ av extrempunkt respektive kritisk punkt är.

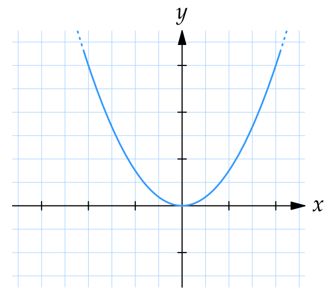
- För $x = -\frac{1}{3}$ har vi att $f''(-\frac{1}{3}) = -4 < 0$ och det betyder att $x = -\frac{1}{3}$ är en lokal maximipunkt.
- För $x = 1$ har vi att $f''(1) = 4 > 0$ och det betyder att $x = 1$ är en lokal minimipunkt.

1.3 Övningar

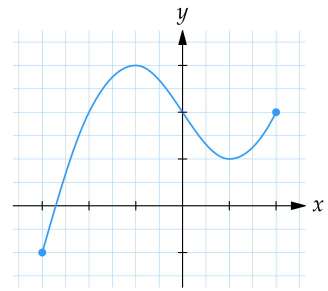
Övning 1.3:1

Bestäm kritiska punkter, terasspunkter, lokala extrempunkter och globala extrempunkter för funktionerna som beskrivs i graferna nedan. Ange också de intervall där funktionen är strängt växande respektive strängt avtagande.

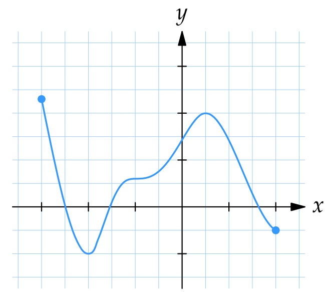
a)



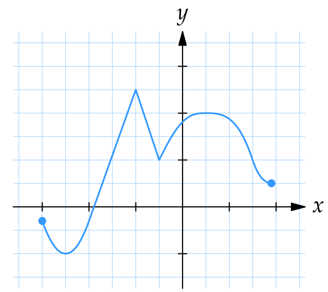
b)



c)



d)



Övning 1.3:2

Bestäm lokala extrempunkter och skissera funktionsgrafen till

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = 2 + 3x - x^2$

c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

d) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x - 15$

Övning 1.3:3

Bestäm alla lokala extrempunkter till

a) $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$

b) $f(x) = e^{-3x} + 5x$

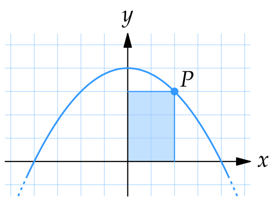
c) $f(x) = x \ln x - 9$

d) $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}$

e) $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$ då $-3 \le x \le 3$

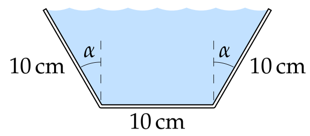
Övning 1.3:4

Var på kurvan $y = 1 - x^2$ i första kvadranten ska punkten P väljas för att rektangeln i figuren till höger ska ha maximal area?



Övning 1.3:5

En 30 cm bred plåt ska användas för att tillverka en ränna. Parallellt med plåtens långsidor viks kanterna upp enligt figuren. Hur stor ska vinkeln α vara för att rännan ska rymma så mycket vatten som möjligt?



Övning 1.3:6

En plåtmugg som har formen av en rät cirkulär cylinder ska tillverkas. Vilken radie och höjd ska muggen ha om man vill att den har en bestämd volym V samtidigt som man använder så lite plåt som möjligt.

Övning 1.3:7

Ur en cirkulär skiva skärs en cirkelsektor bort och de två radiella kanter som uppstår fästs ihop så att man får en konformad strut. Hur stor vinkel ska den borttagna cirkelsektorn ha för att konen ska få maximal volym?

2.1 Inledning till integraler

Innehåll:

- Integralens definition (översiktligt).
- Integralkalkylens huvudsats.
- Primitiv funktion till x^α, $1/x$, e^x, $\cos x$ och $\sin x$.
- Primitiv funktion till summa och differens.

Lärandemål:

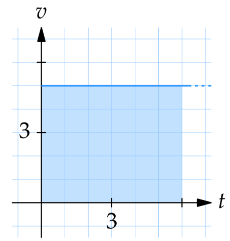
Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Tolka integraler som areor, dvs. ”area ovanför x-axeln” minus ”area under x-axeln”.
- Förstå andra tolkningar av integralen, t.ex. densitet/massa, fart/sträcka, ström/laddning, etc.
- Kunna bestämma primitiv funktion till x^α, $1/x$, e^{kx}, $\cos kx$, $\sin kx$ och summa/differens av sådana termer.
- Kunna räkna ut area under en funktionskurva.
- Kunna räkna ut area mellan två funktionskurvor.
- Veta att alla funktioner inte har primitiv funktion som kan skrivas som ett analytiskt slutet uttryck, t.ex. e^{x^2}, $(\sin x)/x$, $\sin \sin x$, etc.

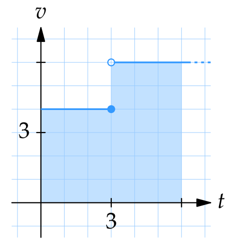
Area under en funktionskurva

Vi har tidigare sett att lutningen på en funktionskurva är intressant. Den ger oss information om hur funktionen ändras och har stor betydelse i många tillämpningar. På ett liknande sätt är den area som bildas mellan en funktionskurva och x-axeln betydelsefull. Den är naturligtvis beroende av funktionskurvans utseende och därmed intimt besläktad med funktionen i fråga. Det är lätt att inse att denna area har en praktisk betydelse i många olika sammanhang.

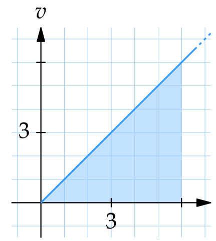
Om ett föremål rör sig så kan vi beskriva dess hastighet v efter tiden t i ett v,t-diagram. Vi ser i nästa figur tre olika fiktiva exempel.



Föremålet rör sig med den konstanta farten 5.



Föremålet rör sig med den konstanta farten 4 för att vid en stöt när $t = 3$ plötsligt öka farten till 6.



Föremålet glider ner för ett sluttande plan och har en linjärt ökande fart.

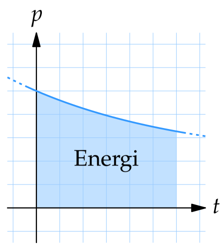
Den tillryggalagda sträckan är i respektive fall

$$s(6) = 5 \cdot 6 = 30\,\text{m}, \qquad s(6) = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 30\,\text{m}, \qquad s(6) = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\,\text{m}.$$

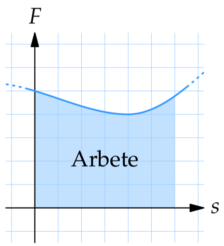
I samtliga fall ser man att föremålets tillryggalagda sträcka motsvaras av arean under funktionskurvan.

Fler exempel på vad arean under en funktionskurva kan symbolisera följer nedan.

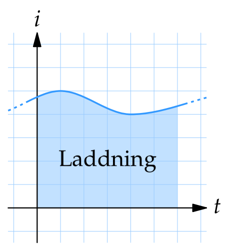
Exempel 1



En solcell som bestrålas av ljus med en viss effekt p kommer ha mottagit en energi som är proportionell mot arean under grafen ovan.



Kraften F som verkar i ett föremåls rörelseriktning utför ett arbete som är proportionell mot arean under grafen ovan.



En kondensator som laddas upp med en ström i kommer ha en laddning som är proportionell mot arean under grafen ovan.

Integralbeteckningen

För att beskriva arean under en funktionskurva i symbolform inför man *integraltecknet* $\int$ och gör följande definition:

Med integralen av den positiva funktionen $f(x)$ från a till b menas arean mellan kurvan $y = f(x)$ och x-axeln från $x = a$ till $x = b$, vilket med symboler skrivs

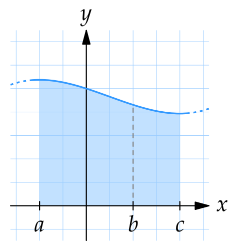
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Talen a och b kallas undre respektive övre integrationsgräns, $f(x)$ kallas integrand och x integrationsvariabel.

Exempel 2

Arean under kurvan $y = f(x)$ från $x = a$ till $x = c$ är lika med arean från $x = a$ till $x = b$ plus arean från $x = b$ till $x = c$. Detta betyder att

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

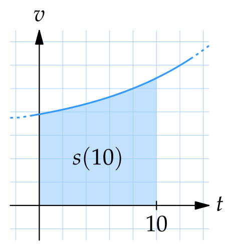


Exempel 3

För ett föremål, vars hastighet förändras enligt funktionen $v(t)$ kan den tillryggalagda sträckan efter 10 s beskrivas med integralen

$$s(10) = \int_0^{10} v(t)\,dt.$$

Anm. Vi antar att hastigheten och sträckan mäts med samma längdenhet.



Exempel 4

Vatten rinner in i en tank med en hastighet som är $f(t)$ liter/s efter t sekunder. Integralen

$$\int_9^{10} f(t)\,dt$$

anger då hur många liter som rinner in i tanken under den tionde sekunden.

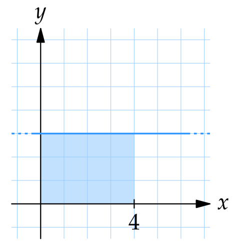
Exempel 5

Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int_0^4 3\,dx$

Integralen kan tolkas som arean under kurvan (linjen) $y = 3$ från $x = 0$ till $x = 4$, dvs. en rektangel med basen 4 och höjden 3,

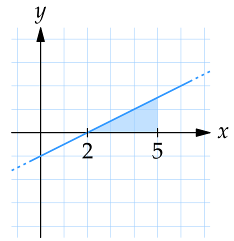
$$\int_0^4 3\,dx = 4\cdot 3 = 12.$$



b) $\displaystyle\int_2^5 \Big(\frac{x}{2}-1\Big)\,dx$

Integralen kan tolkas som arean under linjen $y = x/2 - 1$ från $x = 2$ till $x = 5$, dvs. en triangel med basen 3 och höjden 1,5

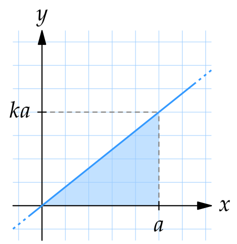
$$\int_2^5 \Big(\frac{x}{2}-1\Big)\,dx = \frac{3\cdot 1{,}5}{2} = 2{,}25.$$



c) $\displaystyle\int_0^a kx\,dx \quad$ där $k > 0\,.$

Integralen kan tolkas som arean under linjen $y = kx$ från $x = 0$ till $x = a$, dvs. en triangel med basen a och höjden ka

$$\int_0^a kx\,dx = \frac{a\cdot ka}{2} = \frac{ka^2}{2}.$$



Primitiv funktion

Funktionen F är en *primitiv* funktion till f om $F'(x) = f(x)$ i något intervall. Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ så är det klart att även $F(x) + C$ är det, för varje konstant C. Dessutom kan man visa att $F(x) + C$ beskriver samtliga primitiva funktioner till $f(x)$.

Exempel 6

a) $F(x) = x^3 + \cos x - 5$ är en primitiv funktion till $f(x) = 3x^2 - \sin x$, eftersom

$$F'(x) = D\,(x^3 + \cos x - 5) = 3x^2 - \sin x - 0 = f(x).$$

b) $G(t) = e^{3t+1} + \ln t$ är en primitiv funktion till $g(t) = 3e^{3t+1} + 1/t$, eftersom

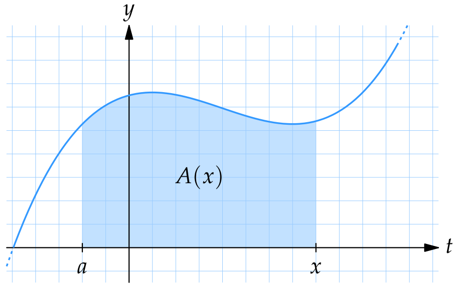
$$G'(t) = D\,(e^{3t+1} + \ln t) = e^{3t+1}\cdot 3 + \frac{1}{t} = g(t).$$

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x + C$, där C är en godtycklig konstant, beskriver samtliga primitiva funktioner till $f(x) = x^3 - 1$.

Samband mellan integral och primitiv funktion

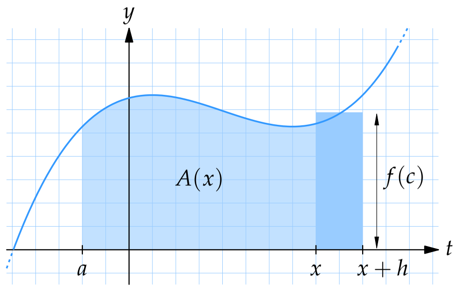
Vi har tidigare konstaterat att arean under en funktionskurva, dvs. integralen av en funktion, är beroende av funktionskurvans utseende. Det visar sig att detta beroende utnyttjar den primitiva funktionen, vilket också ger oss möjligheten att beräkna en sådan area exakt.

Antag att f är en kontinuerlig funktion på ett intervall (= funktionskurvan har inga avbrott i intervallet). Värdet av integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ är då beroende av integrationsgränserna a och b, men om man låter a vara ett fixt värde och sätter x som övre gräns blir integralens värde beroende enbart av den övre integrationsgränsen. För att tydliggöra detta använder vi här i stället t som integrationsvariabel.



$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Vi ska nu visa att A i själva verket är en primitiv funktion till f.



Den totala arean under kurvan från $t = a$ till $t = x + h$ kan skrivas som $A(x+h)$ och är approximativt lika med arean fram till $t = x$ plus arean av en stapel från $t = x$ till $t = x + h$, dvs.

$$A(x+h) \approx A(x) + h \cdot f(c)$$

där c är ett tal mellan x och $x + h$. Detta uttryck kan vi skriva om som

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(c).$$

Om vi låter $h \to 0$ så går vänstra ledet mot $A'(x)$ och det högra ledet mot $f(x)$, dvs.

$$A'(x) = f(x).$$

Funktionen $A(x)$ är alltså en primitiv funktion till $f(x)$.

Beräkning av integraler

För att kunna använda primitiva funktioner vid beräkning av en bestämd integral, noterar vi först att om F är en primitiv funktion till f så är

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + C$$

där konstanten C måste väljas så att högerledet blir noll när $b = a$, dvs.

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C = 0$$

vilket ger att $C = -F(a)$. Om vi sammanfattar har vi alltså att

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Vi kan naturligtvis här lika gärna välja x som integrationsvariabel och skriva

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Vid beräkning av integraler utför man detta i två steg. Först bestämmer man en primitiv funktion och sedan sätter man in integrationsgränserna. Man skriver vanligtvis

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

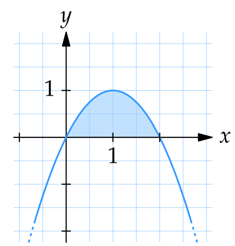
Exempel 7

Arean som begränsas av kurvan $y = 2x - x^2$ och x-axeln kan beräknas med hjälp av integralen

$$\int_0^2 (2x - x^2)\,dx.$$

Eftersom $x^2 - x^3/3$ är en primitiv funktion till integranden är integralens värde

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2x - x^2)\,dx &= \Big[x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^2 \\ &= (2^2 - \tfrac{1}{3}2^3) - (0^2 - \tfrac{1}{3}0^3) \\ &= 4 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3}.\end{aligned}$$



Arean är $\frac{4}{3}$ a.e.

Anm. Integralvärdet har ingen enhet. I praktiska tillämpningar kan dock arean ha en enhet. Om arean i en enhetslös figur efterfrågas skriver man ofta *a.e.* *(areaenheter)* efter siffervärdet.

Baklängesderivering

Att derivera de vanliga funktionstyperna innebär inga oöverstigliga problem; det finns generella metoder för detta. Att utföra den omvända operationen, dvs. hitta en primitiv funktion till en given funktion är dock betydligt svårare och i vissa fall omöjligt! Det finns ingen systematisk metod som fungerar överallt, men genom att utnyttja de vanliga deriveringsreglerna ”baklänges” och dessutom lära sig ett antal specialmetoder och knep kan man klara av en stor del av de funktioner som vanligtvis förekommer.

Symbolen $\int f(x)\,dx$ kallas den *obestämda* integralen av $f(x)$ och används för att beteckna en godtycklig primitiv funktion till $f(x)$. De vanliga deriveringsreglerna ger att

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{där } n \neq -1$$
$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

Exempel 8

a) $\int (x^4 - 2x^3 + 4x - 7)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{4x^2}{2} - 7x + C = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x^2 - 7x + C$

b) $\int \Big(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x^3}\Big)dx = \int \Big(3x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-3}\Big)dx = \frac{3x^{-1}}{-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C = -3x^{-1} + \tfrac{1}{4}x^{-2} + C = -\frac{3}{x} + \frac{1}{4x^2} + C$

c) $\int \frac{2}{3x}\,dx = \int \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \tfrac{2}{3}\ln|x| + C$

d) $\int (e^x - \cos x - \sin x)\,dx = e^x - \sin x + \cos x + C$

Kompensation för ”inre derivata”

Vid derivering av en sammansatt funktion använder man sig av *kedjeregeln*, som innebär att man **multiplicerar** med den *inre derivatan*. Om den inre funktionen då är linjär så blir den inre derivatan en konstant. Vid integrering av en sådan funktion måste man därför **dividera** med den inre derivatan för att kompensera för detta.

Exempel 9

a) $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$

b) $\int \sin 5x\,dx = -\frac{\cos 5x}{5} + C$

c) $\int (2x+1)^4\,dx = \frac{(2x+1)^5}{5\cdot 2} + C$

Exempel 10

a) $\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$

b) $\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k} + C$

c) $\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$

Observera att detta sätt att kompensera för den inre derivatan endast fungerar om den inre derivatan är en konstant.

Räkneregler för integraler

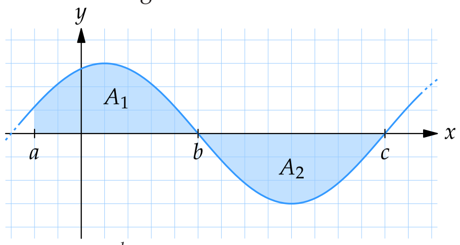
Med hjälp av beräkningsformeln för integraler är det lätt att visa följande räkneregler för integraler:

1. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$
2. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx,$
3. $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,$
4. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$

Dessutom gäller att area under x-axeln räknas negativt, dvs. om funktionskurvan ligger under x-axeln så blir integralens värde negativt:

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx.$$

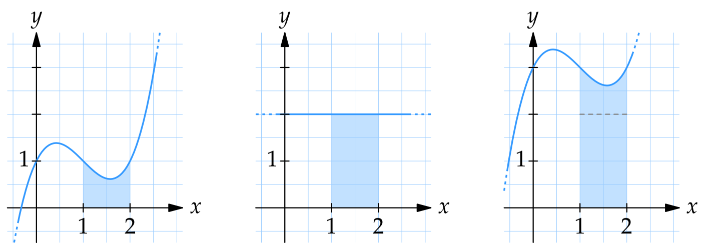


Den sammanlagda arean blir $A_1 + A_2 = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$.

Anm. Värdet av en **integral** kan alltså vara negativt, medan en **area** alltid har ett positivt värde.

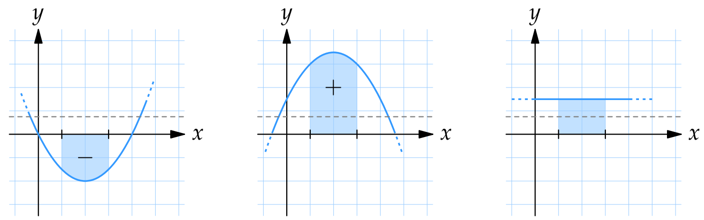
Exempel 11

a) $$\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\,dx + \int_1^2 2\,dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1 + 2)\,dx$$
$$= \Big[\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + 3x\Big]_1^2$$
$$= \big(\tfrac{1}{4}\cdot 4 - 2^3 + 2^2 + 3\cdot 2\big) - \big(\tfrac{1}{4}\cdot 1^4 - 1^3 + 1^2 + 3\cdot 1\big)$$
$$= 6 - 3 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{11}{4}$$



Den vänstra figuren visar arean under grafen till $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ och den mittersta figuren visar arean under grafen till $g(x) = 2$. I figuren till höger adderas dessa areor ihop och ger arean under grafen till $f(x) + g(x)$.

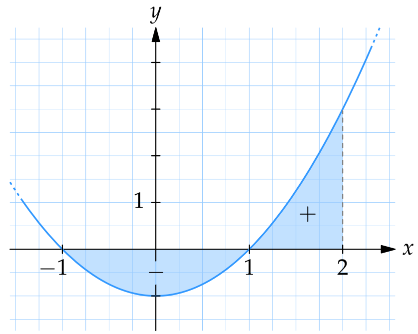
b) $$\int_1^3 (x^2/2 - 2x)\,dx + \int_1^3 (2x - x^2/2 + 3/2)\,dx = \int_1^3 3/2\,dx$$
$$= \Big[\tfrac{3}{2}x\Big]_1^3 = \tfrac{3}{2}\cdot 3 - \tfrac{3}{2}\cdot 1 = 3$$



Grafen till $f(x) = x^2/2 - 2x$ (figuren till vänster) och grafen till $g(x) = 2x - x^2/2 + 3/2$ (figuren i mitten) är spegelsymmetriska kring linjen $y = 3/4$ (streckad linje i figurerna) och det gör att summan $f(x) + g(x)$ är konstant lika med $3/2$. Summan av integralernas värde är därför lika med arean av en rektangel med bas 2 och höjd $3/2$ (figuren till höger).

c) $$\int_1^2 \frac{4x^2 - 2}{3x}\,dx = \int_1^2 \frac{2(2x^2 - 1)}{3x}\,dx = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{2x^2 - 1}{x}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\int_1^2 \Big(2x - \frac{1}{x}\Big)\,dx = \frac{2}{3}\Big[x^2 - \ln x\Big]_1^2$$
$$= \frac{2}{3}\Big((4 - \ln 2) - (1 - \ln 1)\Big) = \tfrac{2}{3}(3 - \ln 2) = 2 - \tfrac{2}{3}\ln 2$$

d) $$\int_{-1}^2 (x^2 - 1)\,dx = \Big[\frac{x^3}{3} - x\Big]_{-1}^2 = \big(\tfrac{8}{3} - 2\big) - \big(\tfrac{-1}{3} + 1\big) = 0$$



Figuren visar grafen till $f(x) = x^2 - 1$ och beräkningen ovan visar att den skuggade arean under x-axeln är lika stor som den skuggade arean ovanför x-axeln.

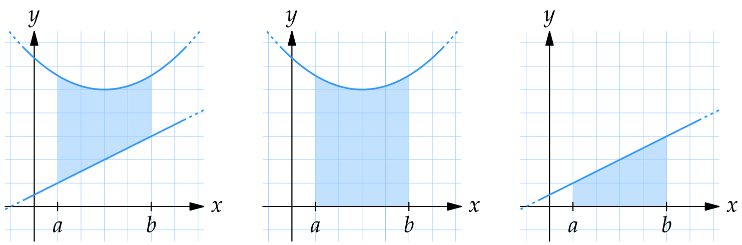
Area mellan kurvor

Om $f(x) \geq g(x)$ i ett intervall $a \leq x \leq b$ gäller att arean mellan funktionskurvorna ges av

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx,$$

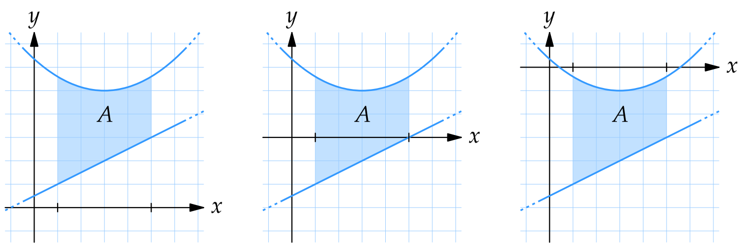
vilket kan förenklas till

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



Om $f(x)$ och $g(x)$ antar positiva värden och $f(x)$ är större än $g(x)$, då ges arean mellan graferna till f och g (figuren till vänster) som differensen mellan arean under grafen till f (figuren i mitten) och arean under grafen till g (figuren till höger).

Observera att det inte spelar någon roll om $f(x) < 0$ eller $g(x) < 0$ så länge som $f(x) \geq g(x)$. Arean mellan kurvorna är naturligtvis lika stor oavsett om kurvorna ligger över eller under x-axeln, vilket följande figurer illustrerar:



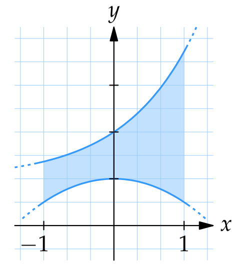
Arean mellan två grafer påverkas inte av om graferna translateras i y-led. Arean mellan graferna till $f(x)$ och $g(x)$ (figuren till vänster) är lika med arean mellan graferna till $f(x) - 3$ och $g(x) - 3$ (figuren i mitten), likväl som arean mellan graferna till $f(x) - 6$ och $g(x) - 6$ (figuren till höger).

Exempel 12

Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = e^x + 1$ och $y = 1 - x^2/2$ samt linjerna $x = -1$ och $x = 1$.

Eftersom $e^x + 1 > 1 - x^2/2$ i hela intervallet blir områdets area

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} (e^x + 1)\,dx - \int_{-1}^{1} \Bigl(1 - \frac{x^2}{2}\Bigr)\,dx \\
&\quad = \int_{-1}^{1} \Bigl(e^x + \frac{x^2}{2}\Bigr)\,dx \\
&\quad = \Bigl[\,e^x + \frac{x^3}{6}\,\Bigr]_{-1}^{1} \\
&\quad = \Bigl(e^1 + \frac{1^3}{6}\Bigr) - \Bigl(e^{-1} + \frac{(-1)^3}{6}\Bigr) \\
&\quad = e - \frac{1}{e} + \frac{1}{3}\ \text{a.e.}
\end{aligned}$$



Exempel 13

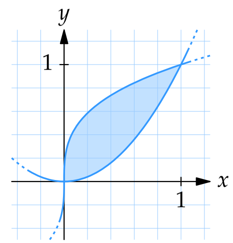
Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = \sqrt[3]{x}$.

Kurvorna skär varandra i punkter där deras y-värden är lika

$$\begin{aligned}
x^2 = x^{1/3} \quad &\Leftrightarrow \quad x^6 = x \quad \Leftrightarrow \quad x(x^5 - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 1.
\end{aligned}$$

Mellan $x = 0$ och $x = 1$ är $\sqrt[3]{x} > x^2$ så områdets area ges av

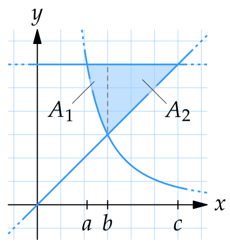
$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^{1/3} - x^2)\,dx &= \Bigl[\,\frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^3}{3}\,\Bigr]_0^1 \\
&= \Bigl[\,\frac{3x^{4/3}}{4} - \frac{x^3}{3}\,\Bigr]_0^1 \\
&= \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{3} - (0 - 0) = \tfrac{5}{12}\ \text{a.e.}
\end{aligned}$$



Exempel 14

Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = \dfrac{1}{x^2}$ samt linjerna $y = x$ och $y = 2$.

I figuren till höger är kurvan och de två linjerna skisserade och då ser vi att området kan delas upp i två delområden som var och en ligger mellan två funktionskurvor. Den totala arean är därför summan av integralerna



$$A_1 = \int_a^b \Bigl(2 - \frac{1}{x^2}\Bigr)\,dx \quad \text{och} \quad A_2 = \int_b^c (2-x)\,dx.$$

Vi bestämmer först skärningspunkterna $x = a$, $x = b$ och $x = c$:

- Skärningspunkten $x = a$ bestäms av ekvationen

$$\frac{1}{x^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

  (Den negativa roten är dock inte aktuell.)

- Skärningspunkt $x = b$ bestäms av ekvationen

$$\frac{1}{x^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

- Skärningspunkt $x = c$ bestäms av ekvationen $x = 2$.

Integralerna blir därför

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{1/\sqrt{2}}^1 \Bigl(2 - \frac{1}{x^2}\Bigr)\,dx = \int_{1/\sqrt{2}}^1 (2 - x^{-2})\,dx = \Bigl[\,2x - \frac{x^{-1}}{-1}\,\Bigr]_{1/\sqrt{2}}^1 \\ &= \Bigl[\,2x + \frac{1}{x}\,\Bigr]_{1/\sqrt{2}}^1 = (2+1) - \Bigl(\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\Bigr) = 3 - 2\sqrt{2}, \\ A_2 &= \int_1^2 (2-x)\,dx = \Bigl[\,2x - \frac{x^2}{2}\,\Bigr]_1^2 = (4-2) - \Bigl(2 - \frac{1}{2}\Bigr) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Den sammanlagda arean blir

$$A_1 + A_2 = 3 - 2\sqrt{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{2} - 2\sqrt{2} \text{ a.e.}$$

2.1 Övningar

Övning 2.1:1

Tolka integralerna som areor och bestäm deras värde

a) $\displaystyle\int_{-1}^2 2\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 (3-2x)\,dx$ d) $\displaystyle\int_{-1}^2 |x|\,dx$

Övning 2.1:2

Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int_0^2 (x^2+3x^3)\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x-2)(x+1)\,dx$

c) $\displaystyle\int_4^9 \Bigl(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\Bigr)\,dx$ d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

Övning 2.1:3

Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int \sin x\,dx$ b) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx$

c) $\displaystyle\int e^{2x}(e^x+1)\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}\,dx$

Övning 2.1:4

a) Beräkna arean mellan kurvan $y = \sin x$ och x-axeln när $0 \le x \le 5\pi/4$.

b) Beräkna arean av det område under kurvan $y = -x^2 + 2x + 2$ och ovanför x-axeln.

c) Beräkna arean av det ändliga området mellan kurvorna $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ och $y = 8 - \frac{1}{8}x^2$ (studentexamen 1965).

d) Beräkna arean av det ändliga området som kurvorna $y = x + 2$, $y = 1$ och $y = 1/x$ innesluter.

e) Beräkna arean av området som ges av olikheterna $x^2 \le y \le x + 2$.

Övning 2.1:5

Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$ (Ledning: förläng med nämnarens konjugat)

b) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ (Ledning: skriv om integranden med en trigonometrisk formel)

2.2 Variabelsubstitution

Innehåll:

- Variabelsubstitution

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Förstå härledningen av formeln för variabelsubstitution.
- Lösa enklare integrationsproblem som kräver omskrivning och/eller substitution i ett steg.
- Veta hur integrationsgränserna ändras under variabelsubstitution.
- Veta när en variabelsubstitution är tillåten.

Variabelsubstitution

När man inte direkt kan bestämma en primitiv funktion genom att utnyttja de vanliga deriveringsreglerna "baklänges", behöver man andra metoder eller tekniker. En sådan är *variabelsubstitution*, vilken kan sägas baseras på regeln för derivering av sammansatta funktioner — den s.k. *kedjeregeln*.

Kedjeregeln $\frac{d}{dx}f(u(x)) = f'(u(x))\cdot u'(x)$ kan i integralform skrivas

$$\int f'(u(x))\cdot u'(x)\,dx = f(u(x)) + C$$

eller,

$$\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = F(u(x)) + C,$$

där F är en primitiv funktion till f. Jämför vi denna formel med

$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$

så kan vi se det som att vi ersätter uttrycket $u(x)$ med variabeln u och $u'(x)\,dx$ med du. Man kan alltså omvandla den krångligare integranden $f(u(x))\cdot u'(x)$ (med x

som variabel) med den förhoppningsvis enklare $f(u)$ (med u som variabel). Metoden kallas variabelsubstitution och kan användas när integranden kan skrivas på formen $f(u(x))\cdot u'(x)$.

Anm. 1 Metoden bygger naturligtvis på att alla förutsättningar för integrering är uppfyllda; att $u(x)$ är deriverbar i det aktuella intervallet, samt att f är kontinuerlig i värdemängden till u, dvs. för alla värden som u kan anta i intervallet.

Anm. 2 Att ersätta $u'(x)\,dx$ med du kan också motiveras genom att studera övergången från differenskvot till derivata:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} = u'(x),$$

vilket när Δx går mot noll kan betraktas som en formell gränsövergång

$$\Delta u \approx u'(x)\Delta x \quad\rightarrow\quad du = u'(x)\,dx,$$

dvs., en liten ändring, dx, i variabeln x ger upphov till en ungefärlig ändring $u'(x)\,dx$ i variabeln u.

Exempel 1

Bestäm integralen $\int 2x\,e^{x^2}\,dx$.

Om man sätter $u(x) = x^2$, så blir $u'(x) = 2x$. Vid variabelbytet ersätts då e^{x^2} med e^u och $u'(x)\,dx$, dvs. $2x\,dx$, med du

$$\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}\cdot 2x\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

Exempel 2

Bestäm integralen $\int (x^3+1)^3\cdot x^2\,dx$.

Sätt $u = x^3+1$. Då blir $u' = 3x^2$, eller $du = 3x^2\,dx$, och

$$\int (x^3+1)^3x^2\,dx = \int \frac{(x^3+1)^3}{3}\cdot 3x^2\,dx = \int \frac{u^3}{3}\,du$$
$$= \frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(x^3+1)^4 + C.$$

Exempel 3

Bestäm integralen $\int \tan x\,dx$, där $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Efter en omskrivning av $\tan x$ som $\sin x/\cos x$ substituerar vi $u = \cos x$,

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \begin{bmatrix} u = \cos x \\ u' = -\sin x \\ du = -\sin x\,dx \end{bmatrix} = \int -\frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Integrationsgränser vid variabelbyte

Vid beräkning av bestämda integraler, t.ex. en area, där man använder variabelsubstitution kan man gå till väga på två sätt. Antingen beräknar man integralen som vanligt, byter tillbaka till den ursprungliga variabeln och sätter in de ursprungliga integrationsgränserna. Alternativt ändrar man integrationsgränser samtidigt som man gör variabelbytet. De båda metoderna illustreras i följande exempel.

Exempel 4

Beräkna integralen $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$.

Metod 1

Sätt $u = e^x$ vilket ger att $u' = e^x$ och $du = e^x\,dx$

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{1+u}\,du = \Big[\ln|1+u|\Big]_{x=0}^{x=2} = \Big[\ln(1+e^x)\Big]_0^2 = \ln(1+e^2) - \ln 2 = \ln\frac{1+e^2}{2}.$$

Observera att integrationsgränserna måste skrivas $x = 0$ och $x = 2$ när integrationsvariabeln inte är x. Det vore fel att skriva

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{1+u}\,du \quad \text{osv.}$$

Metod 2

Sätt $u = e^x$ vilket ger att $u' = e^x$ och $du = e^x\,dx$. Integrationsgränsen $x = 0$ motsvaras då av $u = e^0 = 1$ och $x = 2$ motsvaras av $u = e^2$

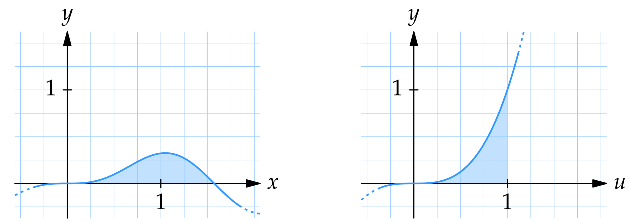
$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{1+u}\,du = \Big[\ln|1+u|\Big]_1^{e^2} = \ln(1+e^2) - \ln 2 = \ln\frac{1+e^2}{2}.$$

Exempel 5

Beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,\cos x\,dx$.

Substitutionen $u = \sin x$ ger att $du = \cos x\,dx$ och integrationsgränserna förändras till $u = \sin 0 = 0$ och $u = \sin(\pi/2) = 1$. Integralen blir

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,\cos x\,dx = \int_0^1 u^3\,du = \Big[\tfrac{1}{4}u^4\Big]_0^1 = \tfrac{1}{4} - 0 = \tfrac{1}{4}.$$



Figuren till vänster visar grafen till integranden $\sin^3 x\,\cos x$ och figuren till höger grafen till integranden u^3 som fås efter variabelsubstitutionen. Vid variabelbytet ändras integranden och integrationsintervallet. Integralens värde, storleken på arean, ändras dock inte.

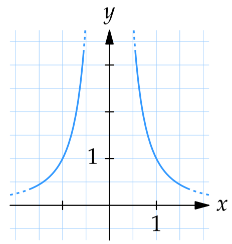
Exempel 6

Betrakta beräkningen

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} u = \sin x \\ du = \cos x\,dx \\ u(-\pi/2) = -1 \\ u(\pi/2) = 1 \end{bmatrix} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{u^2}\,du = \Big[-\frac{1}{u}\Big]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2.$$

Denna uträkning är dock felaktig, vilket beror på att $f(u) = 1/u^2$ inte är kontinuerlig i **hela** intervallet $[-1, 1]$.

Villkoret att $f(u(x))$ ska vara definierad och kontinuerlig för alla värden som $u(x)$ kan anta i det aktuella intervallet behövs om man vill vara säker på att substitutionen $u = u(x)$ ska fungera.



2.2 Övningar

Övning 2.2:1

Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3x-1)^4}$ genom att använda substitutionen $u = 3x - 1$

b) $\displaystyle\int (x^2+3)^5 x\,dx$ genom att använda substitutionen $u = x^2 + 3$

c) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$ genom att använda substitutionen $u = x^3$

Övning 2.2:2

Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos 5x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{2x+3}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{3x+1}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{1-x}\,dx$

Övning 2.2:3

Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int 2x \sin x^2\,dx$ b) $\displaystyle\int \sin x \cos x\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Övning 2.2:4

Använd formeln

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$$

för att beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2+3}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$ d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

2.3 Partiell integrering

Innehåll:

- Partiell integration.

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Förstå härledningen av formeln för partiell integration.
- Lösa integrationsproblem som kräver partiell integration i ett eller två steg.
- Lösa integrationsproblem som kräver partiell integration följt av en substitution (eller tvärt om).

Partiell integration

Vid integrering av produkter kan man ibland använda sig av en metod som kallas *partiell integration*. Metoden bygger på att man använder deriveringsregeln för produkter baklänges. Om f och g är två deriverbara funktioner så gäller enligt produktregeln att

$$D\,(f\cdot g) = f\,'\cdot g + f\cdot g'.$$

Om man nu integrerar båda leden får man

$$f\cdot g = \int (f\,'\cdot g + f\cdot g')\,dx = \int f\,'\cdot g\,dx + \int f\cdot g'\,dx$$

eller efter ommöblering

$$\int f\,'\cdot g\,dx = f\cdot g - \int f\cdot g'\,dx.$$

Detta ger oss formeln för partiell integration.

Partiell integration:

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx.$$

Detta innebär i praktiken att man integrerar en produkt av funktioner genom att kalla den ena faktorn f och den andra g, varefter man byter ut integralen $\int f\cdot g\,dx$ mot den förhoppningsvis enklare integralen $\int F\cdot g'\,dx$, där F är en primitiv funktion till f och g' är derivatan av g.

Det är viktigt att påpeka att metoden inte alltid leder till en integral som är lättare än den ursprungliga. Det kan också vara helt avgörande hur man väljer funktionerna f och g, vilket följande exempel visar.

Exempel 1

Bestäm integralen $\displaystyle\int x\cdot \sin x\,dx\,.$

Om man väljer $f = x$ och $g = \sin x$ får man $F = x^2/2$ och $g' = \cos x$, och enligt formeln för partiell integration

$$\int x\cdot\sin x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\cos x\,dx.$$

Den nya integralen i högerledet är i detta fall inte enklare än den ursprungliga integralen.

Om man i stället väljer $f = \sin x$ och $g = x$ får man $F = -\cos x$ och $g' = 1$, och

$$\int x\cdot\sin x\,dx = -x\cdot\cos x - \int (-1)\cdot\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Exempel 2

Bestäm integralen $\displaystyle\int x^2\cdot \ln x\,dx\,.$

Sätt $f = x^2$ och $g = \ln x$ eftersom då deriverar vi bort logaritmfunktionen när vi utför en partiell integrering: $F = x^3/3$ och $g' = 1/x$. Detta ger oss alltså att

$$\begin{aligned}\int x^2\cdot\ln x\,dx &= \frac{x^3}{3}\cdot\ln x - \int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}\cdot\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}x^3(\ln x - \tfrac{1}{3}) + C.\end{aligned}$$

Exempel 3

Bestäm integralen $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx\,.$

Sätt $f = e^x$ och $g = x^2$, vilket ger att $F = e^x$ och $g' = 2x$, och en partiell integrering ger att

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2x\,e^x\,dx.$$

Här krävs ytterligare partiell integration för att lösa den nya integralen $\int 2x\,e^x\,dx$. Vi väljer i detta fall $f = e^x$ och $g = 2x$, vilket ger att $F = e^x$ och $g' = 2$

$$\int 2x\,e^x\,dx = 2x\,e^x - \int 2\,e^x\,dx = 2x\,e^x - 2e^x + C.$$

Den ursprungliga integralen blir alltså

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2x\,e^x + 2e^x + C.$$

Exempel 4

Bestäm integralen $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx\,.$

I en första partiell integrering väljer vi att integrera faktorn e^x och derivera faktorn $\cos x$,

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x\,dx &= e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x)\,dx.\\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx.\end{aligned}$$

Resultatet blev att vi väsentligen bytte ut faktorn $\cos x$ mot $\sin x$ i integralen. Om vi därför partialintegrerar en gång till (integrera e^x och derivera $\sin x$) då får vi att

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Den ursprungliga integralen dyker här alltså upp igen. Vi får sammantaget:

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

och samlar vi integralerna i ena ledet fås att

$$\int e^x \cos x\,dx = \tfrac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

Trots att de partiella integrationerna i detta fall inte ledde till någon enklare integral kom vi alltså fram till en ekvation där den ursprungliga integralen kunde "lösas ut". Detta är inte helt ovanligt när integranden är en produkt av trigonometriska funktioner och/eller exponentialfunktioner.

Exempel 5

Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{e^x}\,dx\,.$

Integralen kan skrivas om som

$$\int_0^1 \frac{2x}{e^x}\,dx = \int_0^1 2x \cdot e^{-x}\,dx.$$

Sätt nu $f = e^{-x}$ och $g = 2x$, och partialintegrera

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x \cdot e^{-x}\,dx &= \Big[-2x\,e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 2\,e^{-x}\,dx\\ &= \Big[-2x\,e^{-x}\Big]_0^1 + \Big[-2\,e^{-x}\Big]_0^1\\ &= (-2 \cdot e^{-1}) - 0 + (-2 \cdot e^{-1}) - (-2)\\ &= -\frac{2}{e} - \frac{2}{e} + 2 = 2 - \frac{4}{e}.\end{aligned}$$

Exempel 6

Beräkna integralen $\displaystyle\int \ln\sqrt{x}\,dx\,.$

Vi utför först en variabelsubstitution $u = \sqrt{x}$ vilket ger att $du = dx/2\sqrt{x} = dx/2u$, dvs., $dx = 2u\,du$,

$$\int \ln\sqrt{x}\,dx = \int \ln u \cdot 2u\,du.$$

Sedan partialintegrerar vi. Sätt $f = 2u$ och $g = \ln u$, vilket ger att

$$\begin{aligned}\int \ln u \cdot 2u\,du &= u^2 \ln u - \int u^2 \cdot \frac{1}{u}\,du = u^2 \ln u - \int u\,du\\ &= u^2 \ln u - \frac{u^2}{2} + C = x \ln\sqrt{x} - \frac{x}{2} + C\\ &= x\big(\ln\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}\big) + C.\end{aligned}$$

Anm. Ett alternativt tillvägagångssätt är att skriva om den ursprungliga integranden som $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$ och sedan partialintegrera produkten $\frac{1}{2}\cdot\ln x$.

2.3 Övningar

Övning 2.3:1

Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int 2x\,e^{-x}\,dx$ b) $\displaystyle\int (x+1)\sin x\,dx$

c) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$ d) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$

Övning 2.3:2

Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \tan x\,dx$ d) $\displaystyle\int \ln x\,dx$

3.1 Räkning med komplexa tal

Innehåll:

- Real- och imaginärdel
- Addition och subtraktion av komplexa tal
- Komplexkonjugat
- Multiplikation och division av komplexa tal

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Beräkna uttryck som innehåller komplexa tal och är uppbyggda av de fyra räknesätten.
- Lösa komplexa förstagradsekvationer och förenkla svaret.

Inledning

De reella talen utgör en fullständig mängd av tal i den meningen att de fyller tallinjen, dvs. det finns inga "hål" i den reella tallinjen. Trots detta räcker de reella talen inte till som lösningar till alla algebraiska ekvationer, dvs. det finns ekvationer av typen

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

som inte har någon lösning bland de reella talen. Exempelvis har ekvationen $x^2 + 1 = 0$ ingen reell lösning, eftersom inget reellt tal uppfyller att $x^2 = -1$. Om vi däremot kan tänka oss $\sqrt{-1}$ som det tal som uppfyller ekvationen $x^2 = -1$ och tillåter oss att räkna med $\sqrt{-1}$ som vilket tal som helst, så visar det sig att alla algebraiska ekvationer har lösningar.

Talet $\sqrt{-1}$ är alltså inget reellt tal; vi kan inte gå ut i naturen och uppmäta $\sqrt{-1}$ någonstans, eller hitta något som är $\sqrt{-1}$ till antalet, men vi kan ändå ha nytta av talet i högst reella sammanhang.

Exempel 1

Om vi skulle vilja ta reda på summan av rötterna (lösningarna) till ekvationen $x^2 - 2x + 2 = 0$ så får vi först lösningarna $x_1 = 1 + \sqrt{-1}$ och $x_2 = 1 - \sqrt{-1}$. Dessa

rötter innehåller det icke-reella talet $\sqrt{-1}$. Om vi för en stund tillåter oss att räkna med $\sqrt{-1}$ så ser vi att summan av x_1 och x_2 blir $1 + \sqrt{-1} + 1 - \sqrt{-1} = 2$, alltså ett högst reellt tal.

För att lösa vårt problem var vi här tvungna att tillfälligtvis använda tal som inte är reella för att komma fram till den reella lösningen.

Definition av komplexa tal

Man inför den *imaginära enheten* $i = \sqrt{-1}$ och definierar ett *komplext tal* som ett objekt som kan skrivas på formen

$$z = a + bi,$$

där a och b är reella tal, och i uppfyller $i^2 = -1$.

Om $a = 0$ så kallas talet "rent imaginärt". Om $b = 0$ så är talet reellt. Vi ser här att de reella talen utgör en delmängd av de komplexa talen. Mängden av de komplexa talen betecknas med **C**.

För ett godtyckligt komplext tal använder man ofta beteckningen z. Om $z = a + bi$, där a och b är reella, så kallas a för realdelen och b för imaginärdelen av z. Man använder följande skrivsätt:

$$a = \operatorname{Re} z,$$
$$b = \operatorname{Im} z.$$

När man räknar med komplexa tal gör man i princip som med de reella talen, men håller reda på att $i^2 = -1$.

Addition och subtraktion

Vid addition och subtraktion av komplexa tal lägger man ihop (drar ifrån) realdel och imaginärdel var för sig. Om $z = a + bi$ och $w = c + di$ är två komplexa tal gäller alltså att

$$z + w = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i,$$
$$z - w = a + bi - (c + di) = a - c + (b - d)i.$$

Exempel 2

a) $(3 - 5i) + (-4 + i) = -1 - 4i$

b) $\left(\frac{1}{2} + 2i\right) - \left(\frac{1}{6} + 3i\right) = \frac{1}{3} - i$

c) $\dfrac{3 + 2i}{5} - \dfrac{3 - i}{2} = \dfrac{6 + 4i}{10} - \dfrac{15 - 5i}{10} = \dfrac{-9 + 9i}{10} = -0{,}9 + 0{,}9i$

Multiplikation

Komplexa tal multipliceras som vanliga reella tal eller algebraiska uttryck, med tillägget att $i^2 = -1$. Generellt gäller för två komplexa tal $z = a + bi$ och $w = c + di$ att

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Exempel 3

a) $3(4 - i) = 12 - 3i$

b) $2i(3 - 5i) = 6i - 10i^2 = 10 + 6i$

c) $(1 + i)(2 + 3i) = 2 + 3i + 2i + 3i^2 = -1 + 5i$

d) $(3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 - 4i^2 = 13$

e) $(3 + i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3i + i^2 = 8 + 6i$

f) $i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$

g) $i^{23} = i^{22} \cdot i = (i^2)^{11} \cdot i = (-1)^{11} i = -i$

Komplexkonjugat

Om $z = a + bi$ så kallas $\overline{z} = a - bi$ det *komplexa konjugatet* till z (omvänt gäller också att z är konjugatet till $\overline{z}$). Man får då sambanden

$$z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2\,\mathrm{Re}\,z,$$
$$z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = 2b\,i = 2i\,\mathrm{Im}\,z,$$

men kanske framför allt, pga. konjugatregeln, att

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2,$$

dvs. att produkten av ett komplext tal och dess konjugat är alltid reell.

Exempel 4

a) $z = 5 + i$ då är $\overline{z} = 5 - i$.

b) $z = -3 - 2i$ då är $\overline{z} = -3 + 2i$.

c) $z = 17$ då är $\overline{z} = 17$.

d) $z = i$ då är $\overline{z} = -i$.

e) $z = -5i$ då är $\overline{z} = 5i$.

Exempel 5

a) Om $z = 4 + 3i$ då gäller att

- $z + \overline{z} = 4 + 3i + 4 - 3i = 8$
- $z - \overline{z} = 6i$
- $z \cdot \overline{z} = 4^2 - (3i)^2 = 16 + 9 = 25$

b) För z gäller att $\mathrm{Re}\,z = -2$ och $\mathrm{Im}\,z = 1$, och då får vi att

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z = -4$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z = 2i$
- $z \cdot \overline{z} = (-2)^2 + 1^2 = 5$

Division

När man dividerar två komplexa tal med varandra förlänger man med nämnarens konjugat och utnyttjar härigenom att nämnaren då blir ett reellt tal. Därefter kan såväl realdel som imaginärdel i täljaren divideras med detta tal. Generellt, om $z = a + bi$ och $w = c + di$:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Exempel 6

a) $$\frac{4+2i}{1+i} = \frac{(4+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-4i+2i-2i^2}{1-i^2} = \frac{6-2i}{2} = 3-i$$

b) $$\frac{25}{3-4i} = \frac{25(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{25(3+4i)}{3^2-16i^2} = \frac{25(3+4i)}{25} = 3+4i$$

c) $$\frac{3-2i}{i} = \frac{(3-2i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-3i+2i^2}{-i^2} = \frac{-2-3i}{1} = -2-3i$$

Exempel 7

a) $$\frac{2}{2-i} - \frac{i}{1+i} = \frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} - \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4+2i}{5} - \frac{1+i}{2}$$
$$= \frac{8+4i}{10} - \frac{5+5i}{10} = \frac{3-i}{10}$$

b) $$\frac{1-\dfrac{2}{1-i}}{2i+\dfrac{i}{2+i}} = \frac{\dfrac{1-i}{1-i}-\dfrac{2}{1-i}}{\dfrac{2i(2+i)}{(2+i)}+\dfrac{i}{2+i}} = \frac{\dfrac{1-i-2}{1-i}}{\dfrac{4i+2i^2+i}{2+i}} = \frac{\dfrac{-1-i}{1-i}}{\dfrac{-2+5i}{2+i}}$$
$$= \frac{-1-i}{1-i}\cdot\frac{2+i}{-2+5i} = \frac{(-1-i)(2+i)}{(1-i)(-2+5i)} = \frac{-2-i-2i-i^2}{-2+5i+2i-5i^2}$$
$$= \frac{-1-3i}{3+7i} = \frac{(-1-3i)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)} = \frac{-3+7i-9i+21i^2}{3^2-49i^2}$$
$$= \frac{-24-2i}{58} = \frac{-12-i}{29}$$

Exempel 8

Bestäm det reella talet a så att uttrycket $\dfrac{2-3i}{2+ai}$ blir reellt.

Förläng med nämnarens konjugat så att uttrycket kan skrivas med separata real- och imaginärdelar

$$\frac{(2-3i)(2-ai)}{(2+ai)(2-ai)} = \frac{4-2ai-6i+3ai^2}{4-a^2i^2} = \frac{4-3a-(2a+6)i}{4+a^2}$$

Om uttrycket ska bli reellt så måste imaginärdelen vara 0, dvs.

$$2a+6=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=-3.$$

Ekvationer

För att två komplexa tal $z = a + bi$ och $w = c + di$ ska vara lika, krävs att både real- och imaginärdel är lika, dvs. att $a = c$ och $b = d$. När man söker ett okänt komplext tal z i en ekvation kan man antingen försöka lösa ut talet z på vanligt vis, eller sätta in $z = a + bi$ i ekvationen och därefter jämföra real- och imaginärdelar i ekvationens båda led med varandra.

Exempel 9

a) Lös ekvationen $3z + 1 - i = z - 3 + 7i$.

Samla z i vänsterledet genom att subtrahera båda led med z

$$2z + 1 - i = -3 + 7i$$

och subtrahera sedan med $1 - i$

$$2z = -4 + 8i.$$

Detta ger att $z = \dfrac{-4+8i}{2} = -2+4i$.

b) Lös ekvationen $z(-1-i) = 6-2i$.

Dela båda led med $-1-i$ för att få fram z

$$z = \frac{6-2i}{-1-i} = \frac{(6-2i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-6+6i+2i-2i^2}{(-1)^2-i^2} = \frac{-4+8i}{2} = -2+4i.$$

c) Lös ekvationen $3iz - 2i = 1 - z$.

Adderar vi z och $2i$ till båda led fås

$$3iz + z = 1 + 2i \quad \Leftrightarrow \quad z(3i+1) = 1 + 2i.$$

Detta ger att

$$z = \frac{1+2i}{1+3i} = \frac{(1+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i+2i-6i^2}{1-9i^2} = \frac{7-i}{10}.$$

d) Lös ekvationen $2z + 1 - i = \overline{z} + 3 + 2i$.

I ekvationen förekommer z också som $\overline{z}$ och därför skriver vi z som $z = a + ib$ och löser ekvationen för a och b genom att sätta real- och imaginärdel av båda led lika

$$2(a+bi) + 1 - i = (a - bi) + 3 + 2i$$

dvs.

$$(2a+1) + (2b-1)i = (a+3) + (2-b)i,$$

vilket ger att

$$\begin{cases} 2a+1 = a+3 \\ 2b-1 = 2-b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Svaret är alltså $z = 2 + i$.

3.1 Övningar

Övning 3.1:1

Skriv i formen $a + bi$, där a och b är reella tal

a) $(5-2i) + (3+5i)$

b) $3i - (2-i)$

c) $i(2+3i)$

d) $(3-2i)(7+5i)$

e) $(1+i)(2-i)^2$

f) $i^{20} + i^{11}$

Övning 3.1:2

Skriv i formen $a + bi$, där a och b är reella tal

a) $\dfrac{3-2i}{1+i}$

b) $\dfrac{3i}{4-6i} - \dfrac{1+i}{3+2i}$

c) $\dfrac{(2-i\sqrt{3})^2}{1+i\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{5 - \dfrac{1}{1+i}}{3i + \dfrac{i}{2-3i}}$

Övning 3.1:3

Bestäm det reella tal a så att uttrycket $\dfrac{3+i}{2+ai}$ blir rent imaginärt (dvs. realdel lika med noll).

Övning 3.1:4

Lös ekvationerna

a) $z + 3i = 2z - 2$

b) $(2-i)\,z = 3 + 2i$

c) $iz + 2 = 2z - 3$

d) $(2+i)\,\overline{z} = 1 + i$

e) $\dfrac{iz+1}{z+i} = 3 + i$

f) $(1+i)\,\overline{z} + iz = 3 + 5i$

3.2 Polär form

Innehåll:

- Det komplexa talplanet
- Addition och subtraktion i talplanet
- Belopp och argument
- Polär form
- Multiplikation och division i polär form
- Multiplikation med i i talplanet

Lärandemål:

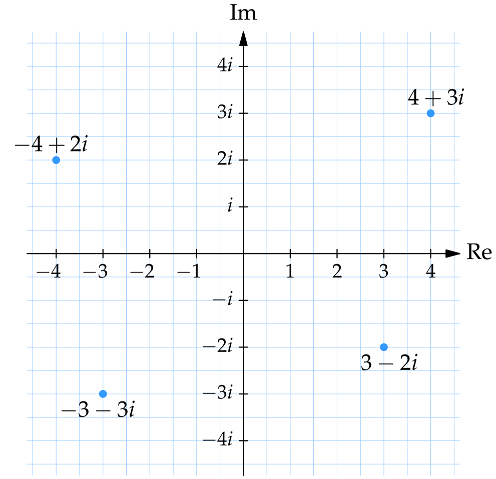
Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Ha geometrisk förståelse för de komplexa talen och räkneoperationerna i talplanet.
- Kunna omvandla komplexa tal mellan formen $a + ib$ och polär form.

Det komplexa talplanet

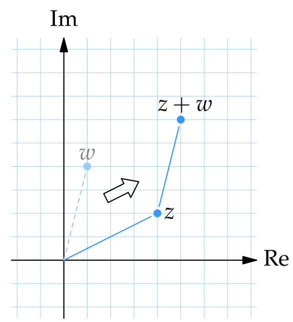
Eftersom ett komplext tal $z = a + bi$ består av en realdel a och en imaginärdel b, så kan z betraktas som ett ordnat talpar (a, b) och tolkas som en punkt i ett koordinatsystem. Man bildar därför ett koordinatsystem genom att ställa en imaginär axel (en tallinje med enheten i) vinkelrätt mot en reell axel (den reella tallinjen). Vi kan nu beskriva varje komplext tal med en punkt i detta koordinatsystem, och varje punkt beskriver ett unikt komplext tal. Denna geometriska tolkning av de komplexa talen kallas det *komplexa talplanet*.

Anm. De reella talen, dvs. alla komplexa tal med imaginärdel 0, ligger alltså längs den reella axeln. Man kan därför se utvidgningen av talsystemet från **R** (de reella talen) till **C** (de komplexa talen) som att tillföra en ny dimension till den redan fyllda tallinjen.

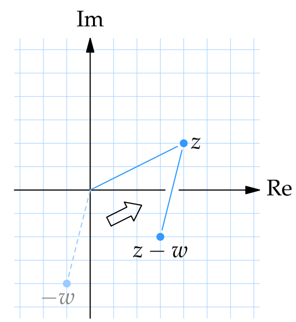


Det komplexa talplanet med talen $-4+2i$, $-3-3i$, $3-2i$ och $4+3i$ markerade.

Addition av komplexa tal får helt naturligt en enkel tolkning i det komplexa talplanet och sker geometriskt på samma sätt som vid addition av vektorer. Subtraktion kan ses som addition av motsvarande negativa tal, dvs. $z - w = z + (-w)$.



Geometriskt fås talet $z + w$ genom att ett tänkt linjesegment från 0 till w parallellförflyttas så att startpunkten i 0 hamnar i z. Då kommer linjesegmentets slutpunkt w hamna i $z + w$.



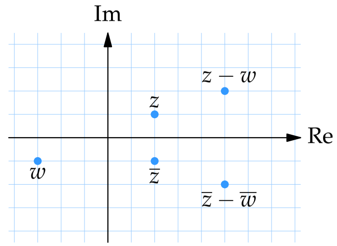
Subtraktionen z - w kan skrivas som z + (-w) och kan därför tolkas geometriskt som att ett tänkt linjesegment från 0 till -w parallellförflyttas så att 0 hamnar i z. Då hamnar segmentets slutpunkt -w i z - w.

Exempel 1

Givet $z = 2+i$ och $w = -3-i$. Markera z, w, $\overline{z}$, $\overline{z}-\overline{w}$ och $z-w$ i det komplexa talplanet.

Vi har att

- $\overline{z} = 2-i$,
- $\overline{w} = -3+i$,
- $z-w = 2+i-(-3-i)$
  $= 5+2i$,
- $\overline{z}-\overline{w} = 2-i-(-3+i)$
  $= 5-2i \quad (=\overline{z-w})$.



Notera hur komplexkonjugerade tal är spegelsymmetriska i reella axeln.

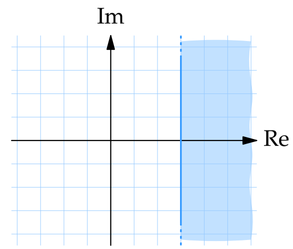
Exempel 2

Markera i det komplexa talplanet alla tal z som uppfyller följande villkor:

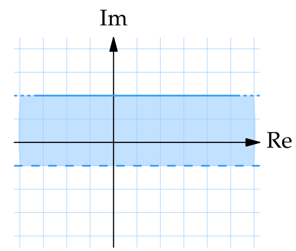
a) $\operatorname{Re} z \geq 3$,

b) $-1 < \operatorname{Im} z \leq 2$.

Den första olikheten definierar området i figuren till vänster nedan och den andra olikheten området i figuren till höger nedan.



Alla tal som uppfyller $\operatorname{Re} z \geq 3$ har en realdel som är större än eller lika med 3. Dessa tal bildar det färgade halvplanet i figuren.



Tal som uppfyller $-1 < \operatorname{Im} z \leq 2$ har en imaginärdel som är mellan -1 och 2. Dessa tal ligger därför inom det bandformade område som markerats i figuren. Den undre horisontella linjen är streckad och det betyder att punkter på den linjen inte tillhör det färgade området.

Absolutbelopp

De reella talen går att ordna i storleksordning, dvs. vi kan avgöra om ett reellt tal är större än ett annat; ju längre till höger på den reella tallinjen desto större är talet.

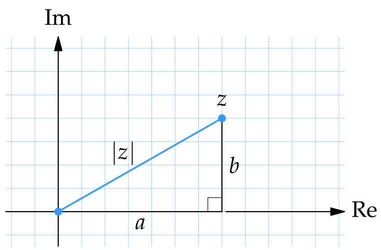
För de komplexa talen saknar man denna möjlighet. Vi kan inte utan vidare avgöra vilket tal som är störst av t.ex. $z = 1-i$ och $w = -1+i$. Med hjälp av begreppet *absolutbelopp* kan vi dock definiera ett mått på storleken av ett komplext tal.

För ett komplext tal $z = a+ib$ definieras absolutbeloppet $|z|$ som

$$|\,z\,| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Vi ser att $|z|$ är ett reellt tal och att $|z| \geq 0$. För reella tal är $b=0$ och då gäller att $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, vilket överensstämmer med den vanliga definitionen för absolutbelopp av reella tal. Geometriskt är absolutbeloppet avståndet från talet $z = a+ib$ (punkten

(a, b)) till $z = 0$ (origo), enligt Pythagoras sats.



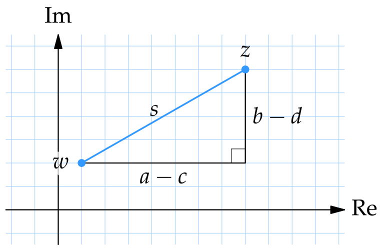
Avstånd mellan komplexa tal

Med hjälp av formeln för avstånd mellan punkter i ett koordinatsystem får man också en viktig och användbar tolkning av absolutbelopp. Avståndet s mellan två komplexa tal $z = a + ib$ och $w = c + id$ (se figur) kan med hjälp av avståndsformeln skrivas

$$s = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Eftersom $z - w = (a - c) + i(b - d)$, så får man att

$$|z - w| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = \text{avståndet mellan talen } z \text{ och } w.$$

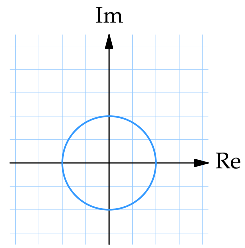


Exempel 3

Markera följande talmängder i det komplexa talplanet:

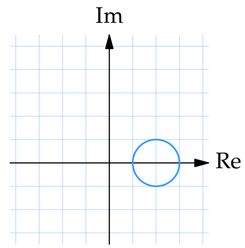
a) $|z| = 2$

Ekvationen beskriver alla tal vars avstånd till origo är 2. Dessa tal bildar i det komplexa talplanet en cirkel med radien 2 och medelpunkt i origo.



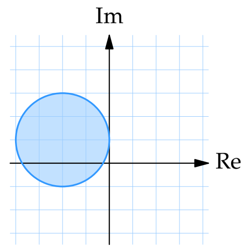
b) $|z - 2| = 1$

Denna ekvation uppfylls av alla tal vars avstånd till talet 2 är 1, dvs. en cirkel med radien 1 och medelpunkt i $z = 2$.



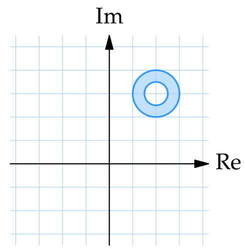
c) $|z + 2 - i| \le 2$

Vänsterledet kan skrivas $|z - (-2 + i)|$, vilket innebär alla tal på avståndet ≤ 2 från talet $-2 + i$, dvs. en cirkelskiva med radien 2 och medelpunkt i $-2 + i$.



d) $\frac{1}{2} \le |z - (2 + 3i)| \le 1$

Mängden ges av alla tal vars avstånd till $z = 2 + 3i$ är mellan $\frac{1}{2}$ och 1.



Exempel 4

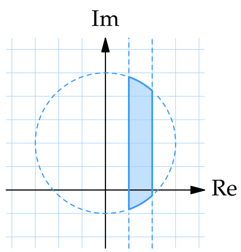
Markera i det komplexa talplanet alla tal z som uppfyller villkoren

a) $\begin{cases} |\,z-2i\,| \le 3 \\ 1 \le \operatorname{Re} z \le 2 \end{cases}$

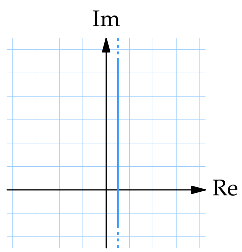
Den första olikheten ger punkterna på och innanför cirkeln med radie 3 och medelpunkt i $2i$. Den andra olikheten ger ett vertikalt band av punkter med realdel mellan 1 och 2. Det område som uppfyller de båda olikheterna ges av de punkter som samtidigt ligger inom cirkeln och bandet.

b) $|\,z+1\,| = |\,z-2\,|$

Ekvationen kan skrivas $|\,z-(-1)\,| = |\,z-2\,|$. Man ser då att z ska ligga på samma avstånd från -1 som från 2. Detta villkor uppfylls av alla tal z som har realdel $\frac{1}{2}$.



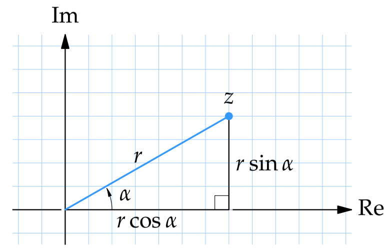
Det färgade området består av de punkter som uppfyller olikheterna $|z-2i| \le 3$ och $1 \le \operatorname{Re} z \le 2$.



De punkter som uppfyller likheten $|z+1| = |z-2|$ ligger på linjen med realdel lika med $\frac{1}{2}$.

Polär form

I stället för att ange ett komplext tal $z = x + iy$ i dess rektangulära koordinater (x, y) kan man använda polära koordinater. Detta innebär att man anger talets läge i det komplexa talplanet genom dess avstånd, r, till origo, samt den vinkel, α, som bildas mellan den positiva realaxeln och sträckan från origo till talet (se figuren).



Eftersom $\cos\alpha = x/r$ och $\sin\alpha = y/r$ så är $x = r\cos\alpha$ och $y = r\sin\alpha$. Talet $z = x + iy$ kan därför skrivas som

$$z = r\cos\alpha + i\,r\sin\alpha = r(\cos\alpha + i\,\sin\alpha),$$

vilket kallas den *polära formen* av ett komplext tal z. Vinkeln α kallas *argumentet* för z och skrivs

$$\alpha = \arg z.$$

Vinkeln α kan t.ex. bestämmas genom att lösa ekvationen $\tan\alpha = y/x$. Denna ekvation har dock flera lösningar, varför man måste se till att man väljer den lösning α som gör att $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ hamnar i rätt kvadrant.

Argumentet till ett komplext tal är inte heller unikt bestämt eftersom vinklar som skiljer sig åt med 2π anger samma riktning i det komplexa talplanet. Normalt brukar man dock ange argumentet som en vinkel mellan 0 och 2π eller mellan $-\pi$ och π.

Det reella talet r, avståndet till origo, känner vi redan som beloppet av z,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |\,z\,|.$$

Exempel 5

Skriv följande komplexa tal i polär form:

a) -3

Vi har att $|-3| = 3$ och $\arg(-3) = \pi$, vilket betyder att $-3 = 3(\cos\pi + i\,\sin\pi)$.

b) i

Vi har att $|\,i\,| = 1$ och $\arg i = \pi/2$ så i polär form är $i = \cos(\pi/2) + i\,\sin(\pi/2)$.

c) $1-i$

Formeln för beloppet av ett komplext tal ger att $|\,1-i\,| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$. Det komplexa talet ligger i den fjärde kvadranten och bildar vinkeln $\pi/4$ med den positiva reella axeln, vilket ger att $\arg(1-i) = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$. Alltså är $1-i = \sqrt{2}\,\bigl(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\bigr)$.

d) $2\sqrt{3}+2i$

Beloppet är enklast att räkna ut

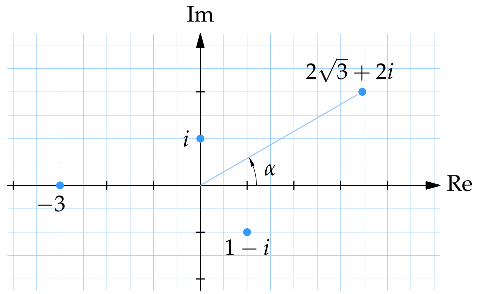
$$|\,2\sqrt{3}+2i\,| = \sqrt{(2\sqrt{3}\,)^2+2^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Om vi kallar argumentet för α så uppfyller det sambandet

$$\tan\alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

och eftersom talet ligger i den första kvadranten (positiv real- och imaginärdel) så är $\alpha = \pi/6$ och vi har att

$$2\sqrt{3}+2i = 4\Bigl(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\Bigr).$$



Multiplikation och division i polär form

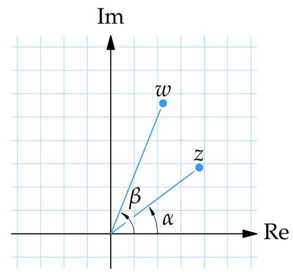
Den stora fördelen med att ha komplexa tal skrivna i polär form är att multiplikation och division då blir väldigt enkla att utföra. För godtyckliga komplexa tal $z = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ och $w = |w|\,(\cos\beta + i\sin\beta)$ kan man genom de trigonometriska additionsformlerna visa att

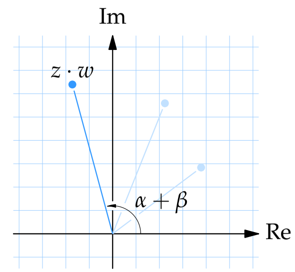
$$z\cdot w = |z|\,|w|\,\bigl(\cos(\alpha+\beta) + i\,\sin(\alpha+\beta)\bigr),$$
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\bigl(\cos(\alpha-\beta) + i\,\sin(\alpha-\beta)\bigr).$$

Vid multiplikation av komplexa tal *multipliceras* alltså beloppen, medan argumenten *adderas*. Vid division av komplexa tal *divideras* beloppen och argumenten *subtraheras*. Detta kan kortfattat skrivas:

$$|\,z\cdot w\,| = |\,z\,|\cdot|\,w\,| \quad \text{och} \quad \arg(z\cdot w) = \arg\,z + \arg\,w,$$
$$\Bigl|\,\frac{z}{w}\,\Bigr| = \frac{|\,z\,|}{|\,w\,|} \quad \text{och} \quad \arg\Bigl(\frac{z}{w}\Bigr) = \arg\,z - \arg\,w.$$

I det komplexa talplanet innebär alltså en multiplikation av z med w att z förlängs med faktorn $|w|$ och roteras moturs med vinkeln $\arg\,w$.





Exempel 6

Beräkna följande uttryck och genom att skriva om på polär form:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\Big/\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

Vi skriver täljaren och nämnaren i polär form

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}} &= 1\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\sin\frac{7\pi}{4}\right),\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}} &= 1\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\sin\frac{3\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

och då följer att

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\Big/\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\sin\frac{7\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\sin\frac{3\pi}{4}}$$

$$=\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\,\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\pi+i\,\sin\pi=-1.$$

b) $(-2-2i)(1+i)$

Faktorerna i uttrycket skriver vi i polär form

$$\begin{aligned}-2-2i &= \sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\,\sin\frac{5\pi}{4}\right),\\ 1+i &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Genom att utföra multiplikationen i polär form får vi att

$$\begin{aligned}(-2-2i)(1+i) &= \sqrt{8}\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\,\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 4\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\,\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-4i.\end{aligned}$$

Exempel 7

a) Beräkna iz och $\frac{z}{i}$ om $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Svara på polär form.

Eftersom $i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ så är

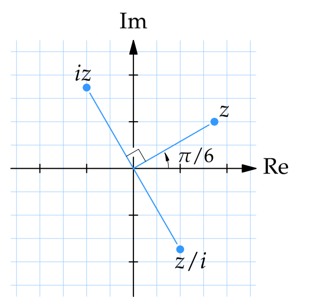
$$\begin{aligned}iz &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\\ \frac{z}{i} &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\,\sin\frac{-\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

b) Beräkna iz och $\frac{z}{i}$ om $z=3\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$. Svara på polär form.

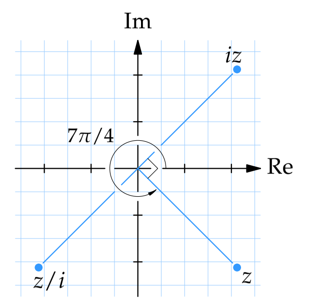
Använder vi den polära formen av i så fås att

$$\begin{aligned}iz &= 3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=3\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)\\ &= 3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\\ \frac{z}{i} &= 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\,\sin\frac{5\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Vi ser här att multiplikation med i innebär en rotation $\pi/2$ moturs, medan division med i medför en rotation $\pi/2$ medurs.



De komplexa talen z, iz och z/i när $|z|=2$ och $\arg z=\pi/6$.



De komplexa talen z, iz och z/i när $|z|=3$ och $\arg z=7\pi/4$.

3.2 Övningar

Övning 3.2:1

Givet de komplexa talen $z = 2 + i$, $w = 2 + 3i$ och $u = -1 - 2i$. Markera följande tal i det komplexa talplanet

a) z och w

b) $z + u$ och $z - u$

c) $2z + w$

d) $z - \overline{w} + u$

Övning 3.2:2

Rita in följande mängder i det komplexa talplanet

a) $0 \le \operatorname{Im} z \le 3$

b) $0 \le \operatorname{Re} z \le \operatorname{Im} z \le 1$

c) $|z| = 2$

d) $|z - 1 - i| = 3$

e) $\operatorname{Re} z = i + \overline{z}$

f) $2 < |z - i| \le 3$

Övning 3.2:3

De komplexa talen $1 + i$, $3 + 2i$ och $3i$ bildar i det komplexa talplanet tre hörn i en kvadrat. Bestäm kvadratens fjärde hörn.

Övning 3.2:4

Bestäm beloppet av

a) $3 + 4i$

b) $(2 - i) + (5 + 3i)$

c) $(3 - 4i)(3 + 2i)$

d) $\dfrac{3 - 4i}{3 + 2i}$

Övning 3.2:5

Bestäm argumentet av

a) -10

b) $-2 + 2i$

c) $(\sqrt{3} + i)(1 - i)$

d) $\dfrac{i}{1 + i}$

Övning 3.2:6

Skriv följande tal i polär form

a) 3

b) $-11i$

c) $-4 - 4i$

d) $\sqrt{10} + \sqrt{30}\, i$

e) $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$

f) $\dfrac{(2 + 2i)(1 + i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12} - 2i)}$

3.3 Potenser och rötter

Innehåll:

- De Moivres formel
- Binomiska ekvationer
- Exponentialform
- Eulers formel
- Kvadratkomplettering
- Andragradsekvationer

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Beräkna potenser av komplexa tal med de Moivres formel.
- Beräkna rötter av vissa komplexa tal genom omskrivning till polär form.
- Lösa binomiska ekvationer.
- Kvadratkomplettera komplexa andragradsuttryck.
- Lösa komplexa andragradsekvationer.

De Moivres formel

Räknereglerna $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ och $|zw| = |z| \cdot |w|$ betyder att

$$\begin{cases} \arg(z \cdot z) = \arg z + \arg z \\ |z \cdot z| = |z| \cdot |z| \end{cases} \qquad \begin{cases} \arg z^3 = 3 \arg z \\ |z^3| = |z|^3 \end{cases} \qquad \text{osv.}$$

För ett godtyckligt tal $z = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$ har vi därför följande samband

$$z^n = \bigl(r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\bigr)^n = r^n\,(\cos n\alpha + i\,\sin n\alpha).$$

Om $|z| = 1$, (dvs. z ligger på enhetscirkeln) gäller speciellt

$$(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\,\sin n\alpha,$$

vilket brukar kallas *de Moivres formel*. Denna relation är mycket användbar när det gäller att härleda trigonometriska identiteter och beräkna rötter och potenser av komplexa tal.

Exempel 1

Om $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, beräkna z^3 och z^{100}.

Skriver vi z i polär form

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = 1 \cdot \Bigl(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\Bigr)$$

så ger de Moivres formel oss att

$$\begin{aligned} z^3 &= \Bigl(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\Bigr)^3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\\ z^{100} &= \Bigl(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\Bigr)^{100} = \cos\frac{100\pi}{4} + i\,\sin\frac{100\pi}{4}\\ &= \cos 25\pi + i\,\sin 25\pi = \cos\pi + i\,\sin\pi = -1. \end{aligned}$$

Exempel 2

På traditionellt sätt kan man med kvadreringsregeln utveckla

$$\begin{aligned} (\cos v + i\,\sin v)^2 &= \cos^2 v + i^2 \sin^2 v + 2i\,\sin v\,\cos v\\ &= \cos^2 v - \sin^2 v + 2i\,\sin v\,\cos v \end{aligned}$$

och med de Moivres formel få att

$$(\cos v + i\,\sin v)^2 = \cos 2v + i\,\sin 2v.$$

Om man identifierar real- respektive imaginärdel i de båda uttrycken får man de kända trigonometriska formlerna

$$\begin{cases} \cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v,\\ \sin 2v = 2\,\sin v\,\cos v. \end{cases}$$

Exempel 3

Beräkna $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{14}}{(1+i\sqrt{3})^7(1+i)^{10}}$.

Vi skriver talen $\sqrt{3}+i$, $1+i\sqrt{3}$ och $1+i$ i polär form

- $\sqrt{3}+i = 2\Bigl(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\Bigr)$,
- $1+i\sqrt{3} = 2\Bigl(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\Bigr)$,
- $1+i = \sqrt{2}\,\Bigl(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\Bigr)$.

Då får vi med de Moivres formel att

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{14}}{(1+i\sqrt{3})^7(1+i)^{10}} = \frac{2^{14}\Bigl(\cos\frac{14\pi}{6} + i\,\sin\frac{14\pi}{6}\Bigr)}{2^7\Bigl(\cos\frac{7\pi}{3} + i\,\sin\frac{7\pi}{3}\Bigr)\cdot(\sqrt{2})^{10}\Bigl(\cos\frac{10\pi}{4} + i\,\sin\frac{10\pi}{4}\Bigr)}$$

och detta uttryck kan förenklas genom att utföra multiplikationen och divisionen i polär form

$$\begin{aligned} \frac{2^{14}\Bigl(\cos\frac{14\pi}{6} + i\,\sin\frac{14\pi}{6}\Bigr)}{2^{12}\Bigl(\cos\frac{29\pi}{6} + i\,\sin\frac{29\pi}{6}\Bigr)} &= 2^2\Bigl(\cos\Bigl(-\frac{15\pi}{6}\Bigr) + i\,\sin\Bigl(-\frac{15\pi}{6}\Bigr)\Bigr)\\ &= 4\Bigl(\cos\Bigl(-\frac{\pi}{2}\Bigr) + i\,\sin\Bigl(-\frac{\pi}{2}\Bigr)\Bigr) = -4i. \end{aligned}$$

Binomiska ekvationer

Ett komplext tal z kallas en n:te rot av det komplexa talet w om

$$z^n = w.$$

Ovanstående samband kan också ses som en ekvation där z är obekant, och en sådan ekvation kallas en *binomisk ekvation*. Lösningarna ges av att skriva båda leden i polär form och jämföra belopp och argument.

För ett givet tal $w = |w|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ ansätter man det sökta talet $z = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$ och den binomiska ekvationen blir

$$r^n\,(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = |w|\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$

där de Moivres formel använts i vänsterledet. För belopp och argument måste nu gälla

$$\begin{cases} r^n = |w|, \\ n\alpha = \theta + k\cdot 2\pi. \end{cases}$$

Observera att vi lägger till multipler av 2π för att få med alla värden på argumentet som anger samma riktning som θ. Man får då att

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{|w|}, \\ \alpha = (\theta + 2k\pi)/n, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Detta ger *ett* värde på r, men oändligt många värden på α. Trots detta blir det inte oändligt många lösningar. Från $k = 0$ till $k = n - 1$ får man olika argument för z och därmed olika lägen för z i det komplexa talplanet. För övriga värden på k kommer man pga. periodiciteten hos sinus och cosinus tillbaka till dessa lägen och får alltså inga nya lösningar. Detta resonemang visar att ekvationen $z^n = w$ har exakt n rötter.

Anm. Observera att rötternas olika argument ligger $2\pi/n$ ifrån varandra, vilket gör att rötterna ligger jämnt fördelade på en cirkel med radien $\sqrt[n]{|w|}$ och bildar hörn i en regelbunden n-hörning.

Exempel 4

Lös den binomiska ekvationen $z^4 = 16\,i$.

Skriv z och $16\,i$ i polär form

- $z = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)\,,$
- $16\,i = 16\Big(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\sin\dfrac{\pi}{2}\Big).$

Då ger ekvationen $z^4 = 16\,i$ att

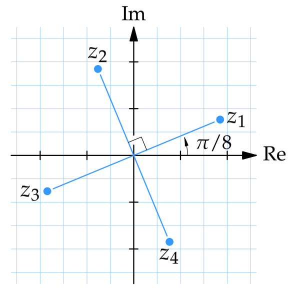
$$r^4\,(\cos 4\alpha + i\,\sin 4\alpha) = 16\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}\Big).$$

När vi identifierar belopp och argument i båda led fås att

$$\begin{cases} r^4 = 16, \\ 4\alpha = \pi/2 + k\cdot 2\pi, \end{cases} \qquad \text{dvs.} \qquad \begin{cases} r = \sqrt[4]{16} = 2, \\ \alpha = \pi/8 + k\pi/2, \quad k = 0,1,2,3. \end{cases}$$

Lösningarna till ekvationen är alltså

$$\begin{cases} z_1 = 2\Big(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\,\sin\dfrac{\pi}{8}\Big), \\ z_2 = 2\Big(\cos\dfrac{5\pi}{8} + i\,\sin\dfrac{5\pi}{8}\Big), \\ z_3 = 2\Big(\cos\dfrac{9\pi}{8} + i\,\sin\dfrac{9\pi}{8}\Big), \\ z_4 = 2\Big(\cos\dfrac{13\pi}{8} + i\,\sin\dfrac{13\pi}{8}\Big). \end{cases}$$



Exponentialform av komplexa tal

Om vi behandlar i likvärdigt med ett reellt tal och betraktar ett komplext tal z som en funktion av α (och r är en konstant),

$$f(\alpha) = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$$

så får vi efter derivering

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= -r\sin\alpha + r\,i\,\cos\alpha = r\,i^2\sin\alpha + r\,i\,\cos\alpha = i\,r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) = i\,f(\alpha) \\ f''(\alpha) &= -r\,\cos\alpha - r\,i\,\sin\alpha = i^2\,r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) = i^2\,f(\alpha) \\ &\text{osv.} \end{aligned}$$

Den enda reella funktion med dessa egenskaper är $f(x) = e^{kx}$, vilket motiverar definitionen

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\sin\alpha.$$

Denna definition visar sig vara en helt naturlig generalisering av exponentialfunktionen för reella tal. Om man sätter $z = a + ib$ så får man

$$e^z = e^{a+ib} = e^a\cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\,\sin b).$$

Definitionen av e^z kan uppfattas som ett bekvämt skrivsätt för den polära formen av ett komplext tal, eftersom $z = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) = r\,e^{i\alpha}$.

Exempel 5

För ett reellt tal z överensstämmer definitionen med den reella exponentialfunktionen, eftersom $z = a + 0\cdot i$ ger att

$$e^z = e^{a+0\cdot i} = e^a(\cos 0 + i\sin 0) = e^a\cdot 1 = e^a.$$

Exempel 6

Ytterligare en indikation på det naturliga i ovanstående definition ges av sambandet

$$(e^{i\alpha})^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha = e^{in\alpha},$$

vilket visar att de Moivres formel egentligen är identisk med en redan känd potenslag,

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Exempel 7

Ur definitionen ovan kan man erhålla sambandet

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

vilket knyter samman de tal som brukar räknas som de mest grundläggande inom matematiken: e, π, i och 1. Detta samband betraktas av många som det vackraste inom matematiken och upptäcktes av Euler i början av 1700-talet.

Exempel 8

Lös ekvationen $(z+i)^3 = -8i$.

Sätt $w = z + i$. Vi får då den binomiska ekvationen $w^3 = -8i$. Till att börja med skriver vi om w och $-8i$ i polär form

- $w = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) = r\,e^{i\alpha}$,
- $-8i = 8\Big(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\,\sin\dfrac{3\pi}{2}\Big) = 8\,e^{3\pi i/2}$.

Ekvationen blir i polär form $r^3e^{3\alpha i} = 8\,e^{3\pi i/2}$ och identifierar vi belopp och argument i båda led har vi att

$$\begin{cases} r^3 = 8, \\ 3\alpha = 3\pi/2 + 2k\pi, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r = \sqrt[3]{8}, \\ \alpha = \pi/2 + 2k\pi/3, \quad k = 0,1,2. \end{cases}$$

Rötterna till ekvationen blir därmed

- $w_1 = 2\,e^{\pi i/2} = 2\Big(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\sin\dfrac{\pi}{2}\Big) = 2i$,
- $w_2 = 2\,e^{7\pi i/6} = 2\Big(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\,\sin\dfrac{7\pi}{6}\Big) = -\sqrt{3} - i$,

- $w_3 = 2\,e^{11\pi i/6} = 2\Big(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\,\sin\dfrac{11\pi}{6}\Big) = \sqrt{3} - i$,

dvs. $z_1 = 2i - i = i$, $z_2 = -\sqrt{3} - 2i$ och $z_3 = \sqrt{3} - 2i$.

Exempel 9

Lös ekvationen $z^2 = \bar{z}$.

Om $z = a + ib$ har $|z| = r$ och $\arg z = \alpha$ så gäller att $\bar{z} = a - ib$ har $|\bar{z}| = r$ och $\arg\bar{z} = -\alpha$. Därför gäller att $z = r\,e^{i\alpha}$ och $\bar{z} = r\,e^{-i\alpha}$. Ekvationen kan därmed skrivas

$$(r\,e^{i\alpha})^2 = r\,e^{-i\alpha} \qquad \text{eller} \qquad r^2e^{2i\alpha} = r\,e^{-i\alpha},$$

vilket direkt ger att $r = 0$ är en lösning, dvs. $z = 0$. Om vi antar att $r \neq 0$ så kan ekvationen skrivas $r\,e^{3i\alpha} = 1$, som ger efter identifikation av belopp och argument

$$\begin{cases} r = 1, \\ 3\alpha = 0 + 2k\pi, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r = 1, \\ \alpha = 2k\pi/3, \quad k = 0,1,2. \end{cases}$$

Lösningarna är

- $z_1 = e^0 = 1$,
- $z_2 = e^{2\pi i/3} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$,
- $z_3 = e^{4\pi i/3} = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\,\sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$,
- $z_4 = 0$.

Kvadratkomplettering

Kvadreringsreglerna,

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

som vanligtvis används för att utveckla parentesuttryck kan även användas baklänges för att erhålla jämna kvadratuttryck. Exempelvis är

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2,$$
$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2.$$

Detta kan utnyttjas vid lösning av andragradsekvationer, t.ex.

$$\begin{aligned} x^2+4x+4 &= 9,\\ (x+2)^2 &= 9. \end{aligned}$$

Rotutdragning ger sedan att $x+2 = \pm\sqrt{9}$ och därmed att $x = -2\pm 3$, dvs. $x = 1$ eller $x = -5$.

Ibland måste man lägga till eller dra ifrån lämpligt tal för att erhålla ett jämnt kvadratuttryck. Ovanstående ekvation kunde exempelvis lika gärna varit skriven

$$x^2+4x-5=0.$$

Genom att addera 9 till båda led får vi det önskade uttrycket i vänster led:

$$\begin{aligned} x^2+4x-5+9 &= 0+9,\\ x^2+4x+4 &= 9. \end{aligned}$$

Metoden kallas *kvadratkomplettering*.

Exempel 10

a) Lös ekvationen $x^2-6x+7=2$.

Koefficienten framför x är -6 och det visar att vi måste ha talet $(-3)^2 = 9$ som konstantterm i vänstra ledet för att få ett jämnt kvadratuttryck. Genom att lägga till 2 på båda sidor åstadkommer vi detta:

$$\begin{aligned} x^2-6x+7+2 &= 2+2,\\ x^2-6x+9 &= 4,\\ (x-3)^2 &= 4. \end{aligned}$$

Rotutdragning ger sedan att $x-3=\pm 2$, vilket betyder att $x=1$ och $x=5$.

b) Lös ekvationen $z^2+21=4-8z$.

Ekvationen kan skrivas $z^2+8z+17=0$. Genom att dra ifrån 1 på båda sidor får vi en jämn kvadrat i vänster led:

$$\begin{aligned} z^2+8z+17-1 &= 0-1,\\ z^2+8z+16 &= -1,\\ (z+4)^2 &= -1, \end{aligned}$$

och därför är $z+4=\pm\sqrt{-1}$. Med andra ord är lösningarna $z=-4-i$ och $z=-4+i$.

Generellt kan man säga att kvadratkomplettering går ut på att skaffa sig "kvadraten på halva koefficienten för x" som konstantterm i andragradsuttrycket. Denna term kan man alltid lägga till i båda led utan att bry sig om vad som fattas. Om koefficienterna i uttrycket är komplexa så kan man gå till väga på samma sätt.

Exempel 11

Lös ekvationen $x^2-\frac{8}{3}x+1=2$.

Halva koefficienten för x är $-\frac{4}{3}$. Vi lägger alltså till $\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ i båda led

$$\begin{aligned} x^2-\tfrac{8}{3}x+\tfrac{16}{9}+1 &= 2+\tfrac{16}{9},\\ \left(x-\tfrac{4}{3}\right)^2 \quad +1 &= \tfrac{34}{9},\\ \left(x-\tfrac{4}{3}\right)^2 &= \tfrac{25}{9}. \end{aligned}$$

Nu är det enkelt att få fram att $x-\frac{4}{3}=\pm\frac{5}{3}$ och därmed att $x=\frac{4}{3}\pm\frac{5}{3}$, dvs. $x=-\frac{1}{3}$ och $x=3$.

Exempel 12

Lös ekvationen $x^2+px+q=0$.

Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned} x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q &= \left(\frac{p}{2}\right)^2,\\ \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2-q,\\ x+\frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}. \end{aligned}$$

Detta ger den vanliga formeln, *pq-formeln*, för lösningar till andragradsekvationer

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Exempel 13

Lös ekvationen $z^2-(12+4i)z-4+24i=0$.

Halva koefficienten för z är $-(6+2i)$ så vi adderar kvadraten på detta uttryck till båda led

$$z^2-(12+4i)z+\bigl(-(6+2i)\bigr)^2-4+24i=\bigl(-(6+2i)\bigr)^2.$$

Räknar vi ut kvadraten $\bigl(-(6+2i)\bigr)^2=36+24i+4i^2=32+24i$ i högerledet och kvadratkompletterar vänsterledet fås

$$\begin{aligned}\bigl(z-(6+2i)\bigr)^2-4+24i&=32+24i,\\ \bigl(z-(6+2i)\bigr)^2&=36.\end{aligned}$$

Efter en rotutdragning har vi att $z-(6+2i)=\pm 6$ och därmed är lösningarna $z=12+2i$ och $z=2i$.

Om man vill åstadkomma en jämn kvadrat i ett fristående uttryck så kan man också göra på samma sätt. För att inte ändra uttryckets värde lägger man då till och drar ifrån den saknade konstanttermen, exempelvis

$$\begin{aligned}x^2+10x+3&=x^2+10x+25+3-25\\&=(x+5)^2-22.\end{aligned}$$

Exempel 14

Kvadratkomplettera uttrycket $z^2+(2-4i)z+1-3i$.

Lägg till och dra ifrån termen $\bigl(\tfrac{1}{2}(2-4i)\bigr)^2=(1-2i)^2=-3-4i$,

$$\begin{aligned}z^2+(2-4i)z+1-3i&=z^2+(2-4i)z+(1-2i)^2-(1-2i)^2+1-3i\\&=\bigl(z+(1-2i)\bigr)^2-(1-2i)^2+1-3i\\&=\bigl(z+(1-2i)\bigr)^2-(-3-4i)+1-3i\\&=\bigl(z+(1-2i)\bigr)^2+4+i.\end{aligned}$$

Lösning med formel

Att lösa andragradsekvationer är ibland enklast med hjälp av den vanliga formeln för andragradsekvationer. Ibland kan man dock råka ut för uttryck av typen $\sqrt{a+ib}$. Man kan då ansätta

$$z=x+iy=\sqrt{a+ib}.$$

Genom att kvadrera båda led får vi att

$$\begin{aligned}(x+iy)^2&=a+ib,\\ x^2-y^2+2xy\,i&=a+ib.\end{aligned}$$

Identifikation av real- och imaginärdel ger nu att

$$\begin{cases}x^2-y^2=a,\\ 2xy=b.\end{cases}$$

Detta ekvationssystem kan lösas med substitution, t.ex. $y=b/(2x)$ som kan sättas in i den första ekvationen.

Exempel 15

Beräkna $\sqrt{-3-4i}$.

Sätt $x+iy=\sqrt{-3-4i}$ där x och y är reella tal. Kvadrering av båda led ger

$$\begin{aligned}(x+iy)^2&=-3-4i,\\ x^2-y^2+2xyi&=-3-4i,\end{aligned}$$

vilket leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases}x^2-y^2=-3,\\ 2xy=-4.\end{cases}$$

Ur den andra ekvationen kan vi lösa ut $y=-4/(2x)=-2/x$ och sätts detta in i den första ekvationen fås att

$$x^2-\frac{4}{x^2}=-3\quad\Leftrightarrow\quad x^4+3x^2-4=0.$$

Denna ekvation är en andragradsekvation i x^2 vilket man ser lättare genom att sätta $t=x^2$,

$$t^2+3t-4=0.$$

Lösningarna är $t=1$ och $t=-4$. Den sista lösningen måste förkastas, eftersom x och y är reella tal och då kan inte $x^2=-4$. Vi får att $x=\pm\sqrt{1}$, vilket ger oss två möjligheter

- $x=-1$ som ger att $y=-2/(-1)=2$,
- $x=1$ som ger att $y=-2/1=-2$.

Vi har alltså kommit fram till att

$$\sqrt{-3-4i}=\begin{cases}1-2i,\\ -1+2i.\end{cases}$$

Exempel 16

a) Lös ekvationen $z^2-2z+10=0$.

Formeln för lösningar till en andragradsekvation (se exempel 3) ger att

$$z=1\pm\sqrt{1-10}=1\pm\sqrt{-9}=1\pm 3i.$$

b) Lös ekvationen $z^2+(4-2i)z-4i=0$.

Även här ger *pq*-formeln lösningarna direkt

$$\begin{aligned} z&=-2+i\pm\sqrt{(-2+i)^2+4i}=-2+i\pm\sqrt{4-4i+i^2+4i}\\ &=-2+i\pm\sqrt{3}=-2\pm\sqrt{3}+i. \end{aligned}$$

c) Lös ekvationen $iz^2+(2+6i)z+2+11i=0$.

Division av båda led med *i* ger att

$$\begin{aligned} z^2+\frac{2+6i}{i}z+\frac{2+11i}{i}&=0,\\ z^2+(6-2i)z+11-2i&=0. \end{aligned}$$

Applicerar vi sedan *pq*-formeln så fås att

$$\begin{aligned} z&=-3+i\pm\sqrt{(-3+i)^2-(11-2i)}\\ &=-3+i\pm\sqrt{-3-4i}\\ &=-3+i\pm(1-2i), \end{aligned}$$

där vi använt det framräknade värdet på $\sqrt{-3-4i}$ från exempel 15. Lösningarna är alltså

$$z=\begin{cases}-2-i,\\ -4+3i.\end{cases}$$

3.3 Övningar

Övning 3.3:1

Skriv följande tal i formen $a+ib$, där a och b är reella tal.

a) $(i+1)^{12}$

b) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$

c) $(4\sqrt{3}-4i)^{22}$

d) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$

e) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})(1-i)^8}{(\sqrt{3}-i)^9}$

Övning 3.3:2

Lös ekvationerna

a) $z^4=1$

b) $z^3=-1$

c) $z^5=-1-i$

d) $(z-1)^4+4=0$

e) $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2=-1$

Övning 3.3:3

Kvadratkomplettera följande uttryck

a) z^2+2z+3

b) $z^2+3iz-\frac{1}{4}$

c) $-z^2-2iz+4z+1$

d) $iz^2+(2+3i)z-1$

Övning 3.3:4

Lös ekvationerna

a) $z^2=i$

b) $z^2-4z+5=0$

c) $z^2+2z+3=0$

d) $\dfrac{1}{z}+z=\dfrac{1}{2}$

Övning 3.3:5

Lös ekvationerna

a) $z^2-2(1+i)z+2i-1=0$

b) $z^2-(2-i)z+(3-i)=0$

c) $z^2-(1+3i)z-4+3i=0$

d) $(4+i)z^2+(1-21i)z=17$

Övning 3.3:6

Bestäm lösningarna till $z^2=1+i$ dels i polär form, dels i formen $a+ib$, där a och b är reella tal. Använd resultatet för att beräkna $\tan(\pi/8)$.

3.4 Komplexa polynom

Innehåll:

- Faktorsatsen
- Polynomdivision
- Algebrans fundamentalsats

Lärandemål:

Efter detta avsnitt ska du ha lärt dig att:

- Utföra polynomdivision.
- Förstå sambandet mellan faktorer och nollställen till polynom.
- Veta att en polynomekvation av grad n har n rötter (räknade med multiplicitet).
- Veta att reella polynomekvationer har komplexkonjugerade rötter.

Polynom och ekvationer

Ett uttryck på formen

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

där n är ett naturligt tal, kallas ett *polynom* av grad n i en obestämd variabel x. Talet a_1 kallas koefficienten för x, a_2 koefficienten för x^2, etc. Konstanten a_0 kallas *konstanttermen*.

Polynom är grundläggande för en stor del av matematiken och visar bl.a. upp stora likheter med våra heltal, vilket gör att vi kan räkna med polynom på liknande sätt som med heltalen.

Exempel 1

Jämför följande heltal skrivet i basen 10,

$$1353 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3$$

med ett polynom i x

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3$$

och sedan följande divisioner,

- $\dfrac{1353}{11} = 123$ eftersom $1353 = 123 \cdot 11$,
- $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}{x+1} = x^2 + 2x + 3$ eftersom $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = (x^2 + 2x + 3)(x+1)$.

Om $p(x)$ är ett polynom av grad n så kallas $p(x) = 0$ en *polynomekvation* av grad n. Om $x = a$ är ett tal sådant att $p(a) = 0$ så kallas $x = a$ en *rot*, eller lösning till ekvationen. Man säger också att $x = a$ är ett *nollställe* till $p(x)$.

Som exemplet ovan visade kan polynom divideras precis som heltal. En sådan division går, precis som för heltal, i allmänhet inte jämnt upp. Om t.ex. 37 divideras med 5, får man

$$\frac{37}{5} = \frac{35+2}{5} = 7 + \frac{2}{5}.$$

Uträkningen kan även skrivas $37 = 7 \cdot 5 + 2$. Talet 7 kallas *kvot* och talet 2 *rest*. Man säger att division av 37 med 5 ger kvoten 7 och resten 2.

Om $p(x)$ och $q(x)$ är polynom så kan man på liknande sätt dividera $p(x)$ med $q(x)$ och entydigt bestämma polynom $k(x)$ och $r(x)$ så att

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

eller $p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$. Man säger här att polynomdivisionen ger kvoten $k(x)$ och resten $r(x)$.

Det är uppenbart att en division går jämnt upp om resten är noll. För polynom uttrycks detta på följande sätt: Om $r(x) = 0$ så är $p(x)$ delbart med $q(x)$, eller, $q(x)$ är en *delare* till $p(x)$. Man skriver

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x),$$

eller $p(x) = k(x) \cdot q(x)$.

Polynomdivision

Om $p(x)$ är ett polynom med högre grad än polynomet $q(x)$ så kan man dividera $p(x)$ med $q(x)$. Det kan t.ex. göras genom att successivt subtrahera lämpliga multipler av $q(x)$ från $p(x)$ tills den återstående täljaren har lägre grad än $q(x)$ i nämnaren.

Exempel 2

Utför polynomdivisionen $\dfrac{x^3+x^2-x+4}{x+2}$.

Det första steget är att vi *lägger till och drar ifrån* en lämplig x^2-term i täljaren

$$\frac{x^3+x^2-x+4}{x+2}=\frac{x^3+2x^2-2x^2+x^2-x+4}{x+2}.$$

Anledningen till att vi gör detta är att nu kan deluttrycket x^3+2x^2 skrivas som $x^2(x+2)$ och förkortas med nämnaren

$$\frac{x^2(x+2)-2x^2+x^2-x+4}{x+2}=x^2+\frac{-x^2-x+4}{x+2}.$$

Sedan lägger vi till och drar ifrån en lämplig x-term så att den ledande x^2-termen i täljaren kan förkortas bort

$$\begin{aligned}x^2+\frac{-x^2-2x+2x-x+4}{x+2}&=x^2+\frac{-x(x+2)+2x-x+4}{x+2}\\&=x^2-x+\frac{x+4}{x+2}.\end{aligned}$$

Det sista steget är att vi lägger till och drar ifrån en konstant

$$x^2-x+\frac{x+4}{x+2}=x^2-x+\frac{x+2-2+4}{x+2}=x^2-x+1+\frac{2}{x+2}.$$

Alltså gäller att

$$\frac{x^3+x^2-x+4}{x+2}=x^2-x+1+\frac{2}{x+2}.$$

Kvoten är x^2-x+1 och resten är 2. Eftersom resten inte är noll går divisionen inte jämnt upp, dvs. $q(x)=x+2$ är inte en *delare* till $p(x)=x^3+x^2-x+4$.

Samband mellan faktorer och nollställen

Om $q(x)$ är en delare till $p(x)$ så gäller alltså att $p(x)=k(x)\cdot q(x)$. Vi har därmed *faktoriserat* $p(x)$. Man säger att $q(x)$ är en faktor i $p(x)$. Speciellt gäller att om förstagradspolynomet $(x-a)$ är en delare till $p(x)$ så är $(x-a)$ en faktor i $p(x)$, dvs.

$$p(x)=q(x)\cdot(x-a).$$

Eftersom $p(a)=q(a)\cdot(a-a)=q(a)\cdot 0=0$ så betyder detta att $x=a$ är ett nollställe till $p(x)$. Detta är precis innehållet i den s.k. *faktorsatsen*.

Faktorsatsen:

$(x-a)$ är en delare till polynomet $p(x)$ om och endast om $x=a$ är ett nollställe till $p(x)$.

Observera att satsen gäller åt båda hållen, dvs. om man vet att $x=a$ är ett nollställe till $p(x)$ så vet man automatiskt att $p(x)$ är delbart med $(x-a)$.

Exempel 3

Polynomet $p(x)=x^2-6x+8$ kan faktoriseras som

$$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$$

och har därför nollställena $x=2$ och $x=4$ (och inga andra). Det är precis dessa man får fram om man löser ekvationen $x^2-6x+8=0$.

Exempel 4

a) Faktorisera polynomet $x^2-3x-10$.

Genom att bestämma polynomets nollställen får man enligt faktorsatsen automatiskt dess faktorer. Andragradsekvationen $x^2-3x-10=0$ har lösningarna

$$x=\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2-(-10)}=\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{7}{2},$$

dvs. $x=-2$ och $x=5$. Detta betyder att $x^2-3x-10=(x-(-2))(x-5)=(x+2)(x-5)$.

b) Faktorisera polynomet x^2+6x+9.

Detta polynom har en dubbelrot

$$x=-3\pm\sqrt{(-3)^2-9}=-3$$

och därmed är $x^2+6x+9=(x-(-3))(x-(-3))=(x+3)^2$.

c) Faktorisera polynomet x^2-4x+5.

I detta fall har polynomet två komplexa rötter

$$x=2\pm\sqrt{2^2-5}=2\pm\sqrt{-1}=2\pm i$$

och faktoriseringen blir $(x-(2-i))(x-(2+i))$.

Exempel 5

Bestäm ett tredjegradspolynom med nollställena 1, -1 och 3.

Polynomet måste enligt faktorsatsen ha faktorerna $(x-1)$, $(x+1)$ och $(x-3)$. Multiplicerar vi ihop dessa faktorer får vi just ett tredjegradspolynom

$$(x-1)(x+1)(x-3) = (x^2-1)(x-3) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

Algebrans fundamentalsats

Vi införde i början av detta kapitel de komplexa talen för att kunna lösa andragradsekvationen $x^2 = -1$ och man kan nu ställa sig den lite mer teoretiska frågan om detta räcker, eller behöver vi uppfinna fler typer av tal för att kunna lösa andra mer komplicerade polynomekvationer. Svaret på den frågan är att det behöver vi inte göra utan det räcker med de komplexa talen. Den tyske matematikern Carl Friedrich Gauss bevisade år 1799 *algebrans fundamentalsats* som säger följande:

Varje polynom av grad $n \geq 1$ med komplexa koefficienter har minst ett nollställe bland de komplexa talen.

Eftersom varje nollställe enligt faktorsatsen motsvaras av en faktor, kan man nu också fastställa följande sats:

Varje polynom av grad $n \geq 1$ har exakt n stycken nollställen om varje nollställe räknas med sin *multiplicitet*.

(Med multiplicitet menas att ett dubbelt nollställe räknas 2 gånger, ett trippelnollställe 3 gånger, osv.)

Notera att dessa satser bara säger att det *finns* komplexa rötter till polynom men inte *hur* man räknar ut dessa. I allmänhet finns det ingen enkel metod att skriva upp en formel för rötterna, utan för polynomekvationer av högre gradtal får vi använda diverse knep för att lösa. Om vi håller oss till polynom med reella koefficienter så är ett av dessa knep som kan hjälpa oss att polynomets komplexa rötter alltid är komplexkonjugerade.

Exempel 6

Visa att polynomet $p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ har nollställena $x = i$ och $x = 2 - i$. Bestäm därefter övriga nollställen.

Vi har att

$$\begin{aligned} p(i) &= i^4 - 4i^3 + 6i^2 - 4i + 5 = 1 + 4i - 6 - 4i + 5 = 0,\\ p(2-i) &= (2-i)^4 - 4(2-i)^3 + 6(2-i)^2 - 4(2-i) + 5. \end{aligned}$$

För att räkna ut det sista uttrycket behöver vi bestämma

$$\begin{aligned} &(2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i,\\ &(2-i)^3 = (3-4i)(2-i) = 6 - 3i - 8i + 4i^2 = 2 - 11i,\\ &(2-i)^4 = (2-11i)(2-i) = 4 - 2i - 22i + 11i^2 = -7 - 24i. \end{aligned}$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} p(2-i) &= -7 - 24i - 4(2-11i) + 6(3-4i) - 4(2-i) + 5\\ &= -7 - 24i - 8 + 44i + 18 - 24i - 8 + 4i + 5 = 0, \end{aligned}$$

vilket visar att i och $2 - i$ är nollställen till polynomet.

Eftersom polynomet har reella koefficienter kan vi direkt säga att de två andra nollställena är komplexkonjugatet av de två första nollställena, dvs. de två andra rötterna är $z = -i$ och $z = 2 + i$.

En konsekvens av algebrans fundamentalsats (och faktorsatsen) är att alla polynom kan faktoriseras i en produkt av komplexa förstagradsfaktorer. Detta gäller även polynom med reella koefficienter, men för dessa går det att multiplicera ihop förstagradsfaktorer som hör till komplexkonjugerade rötter och få en faktorisering helt med reella första- och andragradsfaktorer.

Exempel 7

Visa att $x = 1$ är ett nollställe till $p(x) = x^3 + x^2 - 2$. Faktorisera därefter $p(x)$ i polynom med reella koefficienter, samt fullständigt i förstagradsfaktorer.

Vi har att $p(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 0$ vilket visar att $x = 1$ är ett nollställe till polynomet. Enligt faktorsatsen betyder detta att $x - 1$ är en faktor i $p(x)$, dvs. att $p(x)$ är delbar med $x - 1$. Vi delar därför polynomet med $x - 1$ för att få återstående faktor om $x-1$ bryts ut ur polynomet

$$\frac{x^3+x^2-2}{x-1} = \frac{x^2(x-1)+2x^2-2}{x-1} = x^2 + \frac{2x^2-2}{x-1} = x^2 + \frac{2x(x-1)+2x-2}{x-1}$$
$$= x^2+2x+\frac{2x-2}{x-1} = x^2+2x+\frac{2(x-1)}{x-1} = x^2+2x+2.$$

Alltså har vi att $p(x) = (x-1)(x^2+2x+2)$.
Nu återstår att faktorisera x^2+2x+2. Ekvationen $x^2+2x+2 = 0$ har lösningarna

$$x = -1 \pm \sqrt{(-1)^2-2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$$

och därför har polynomet följande faktoriseringen i komplexa förstagradsfaktorer

$$\begin{aligned} x^3+x^2-2 = (x-1)(x^2+2x+2) &= (x-1)(x-(-1+i))(x-(-1-i)) \\ &= (x-1)(x+1-i)(x+1+i). \end{aligned}$$

3.4 Övningar

Övning 3.4:1

Utför följande polynomdivisioner (alla går inte jämnt ut)

a) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $\dfrac{x^2}{x+1}$ c) $\dfrac{x^3+a^3}{x+a}$

d) $\dfrac{x^3+x+2}{x+1}$ e) $\dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2+3x+1}$

Övning 3.4:2

Ekvationen $z^3-3z^2+4z-2=0$ har roten $z=1$. Bestäm övriga rötter.

Övning 3.4:3

Ekvationen $z^4+2z^3+6z^2+8z+8 = 0$ har rötterna $z = 2i$ och $z = -1-i$. Lös ekvationen.

Övning 3.4:4

Bestäm två reella tal a och b så att ekvationen $z^3+az+b=0$ har roten $z=1-2i$. Lös sedan ekvationen.

Övning 3.4:5

Bestäm a och b så att ekvationen $z^4-6z^2+az+b=0$ har en trippelrot. Lös sedan ekvationen.

Övning 3.4:6

Ekvationen $z^4+3z^3+z^2+18z-30=0$ har en rent imaginär rot. Bestäm alla rötter.

Övning 3.4:7

Bestäm polynom som har följande nollställen

a) 1, 2 och 4 b) $-1+i$ och $-1-i$

Facit till övningsuppgifter

Derivata

1.1:1 a) $f'(-5) > 0$ och $f'(1) < 0$
b) $x = -3$ och $x = 2$
c) $-3 < x < 2$

1.1:2 a) $f'(x) = 2x - 3$
b) $f'(x) = -\sin x - \cos x$
c) $f'(x) = e^x - 1/x$
d) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = 1/2\sqrt{x}$
e) $f'(x) = 4x(x^2-1)$
f) $f'(x) = -\sin(x + \pi/3)$

1.1:3 14,0 m/s

1.1:4 Tangenten: $y = 2x - 1$
Normalen: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

1.1:5 $\big(1-\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}\big)$ och $\big(1+\sqrt{2}, -3-2\sqrt{2}\big)$

1.2:1 a) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
b) $2x\ln x + x$
c) $\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = 1 - \dfrac{2}{(x+1)^2}$
d) $\dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2}$
e) $\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{(\ln x)^2}$
f) $\dfrac{\ln x + 1}{\sin x} - \dfrac{x\ln x\cos x}{\sin^2 x}$

1.2:2 a) $\cos x^2 \cdot 2x$
b) $e^{x^2+x}(2x+1)$
c) $-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$
d) $\dfrac{1}{x\ln x}$
e) $(2x+1)^3(10x+1)$
f) $\dfrac{\sin\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$

1.2:3 a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$
b) $-\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}\sqrt{x+1}}$
c) $-\dfrac{1-2x^2}{x^2(1-x^2)^{3/2}}$
d) $-\cos\cos\sin x \cdot \sin\sin x \cdot \cos x$
e) $e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x$
f) $x^{\tan x}\Big(\dfrac{\ln x}{\cos^2 x} + \dfrac{\tan x}{x}\Big)$

1.2:4 a) $\dfrac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$
b) $-\dfrac{2\sin\ln x}{x}$

1.3:1 a) Kritisk punkt: $x = 0$
Terasspunkt: Saknas
Lokalt min: $x = 0$
Lokalt max: Saknas
Globalt min: $x = 0$
Globalt max: Saknas
Strängt väx.: $x \geq 0$
Strängt avt.: $x \leq 0$
b) Kritisk punkt: $x = -1$ och 1
Terasspunkt: Saknas
Lokalt min: $x = -3$ och 1
Lokalt max: $x = -1$ och 2
Globalt min: $x = -3$
Globalt max: $x = -1$
Strängt väx.: $[-3,-1]$ och $[1,2]$
Strängt avt.: $[-1,1]$
c) Kritisk punkt: $x = -2$, -1, och $\frac{1}{2}$
Terasspunkt: $x = -1$
Lokalt min: $x = -2$ och 2
Lokalt max: $x = -3$ och $\frac{1}{2}$
Globalt min: $x = -2$
Globalt max: $x = -3$
Strängt väx.: $[-2,\frac{1}{2}]$
Strängt avt.: $[-3,-2]$ och $[\frac{1}{2},2]$
d) Kritisk punkt: $x = -\frac{5}{2}$ och $\frac{1}{2}$
Terasspunkt: Saknas
Lokalt min: $x = -\frac{5}{2}$, $-\frac{1}{2}$ och 2
Lokalt max: $x = -3$, -1, och $\frac{1}{2}$
Globalt min: $x = -\frac{5}{2}$
Globalt max: $x = -1$
Strängt väx.: $[-\frac{5}{2},-1]$, $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$
Strängt avt.: $[-3,-\frac{5}{2}]$, $[-1,-\frac{1}{2}]$ och $[\frac{1}{2},2]$

1.3:2 a) $x = 1$ (lokalt min)
b) $x = \frac{3}{2}$ (lokalt max)
c) $x = -2$ (lokalt max)
$x = 1$ (lokalt min)
d) Lokal extrempunkt saknas

1.3:3 a) $x = 0$ (lokalt max)
b) $x = -\frac{1}{3}\ln\frac{5}{3}$ (lokalt min)
c) $x = 1/e$ (lokalt min)
d) $x = -\sqrt{\sqrt{2}-1}$ (lokalt max)
$x = 0$ (lokalt min)
$x = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ (lokalt max)
e) $x = -3$ (lokalt min)
$x = -2$ (lokalt max)
$x = 1$ (lokalt min)
$x = 3$ (lokalt max)

1.3:4 $P = \big(1/\sqrt{3}, 2/3\big)$

1.3:5 $\alpha = \pi/6$

1.3:6 Radie = höjd = $\sqrt[3]{V/\pi}$

1.3:7 $2\pi\big(1-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\big)$ radianer

Integraler

2.1:1 a) 6 b) 2 c) 2 d) $\frac{5}{2}$

2.1:2 a) $\frac{44}{3}$ b) $-\frac{9}{2}$ c) $\frac{32}{3}$ d) 1

2.1:3 a) $-\cos x + C$ b) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$
c) $\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x} + C$
d) $\frac{1}{2}x^2 + \ln x + C$

2.1:4 a) $\big(3 - 1/\sqrt{2}\big)$ a.e. b) $4\sqrt{3}$ a.e.
c) 32 a.e.
d) $\big(\sqrt{2} - 1 - \ln(\sqrt{2}-1)\big)$ a.e.
e) $\frac{9}{2}$ a.e.

2.1:5 a) $\frac{2}{27}\big((x+9)\sqrt{x+9} + x\sqrt{x}\big) + C$
b) $-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$

2.2:1 a) $\frac{13}{1000}$ b) $\frac{1}{12}(x^2+3)^6 + C$
c) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$

2.2:2 a) 0 b) $\frac{1}{2}(e^4 - e^3)$ c) 14 d) $\frac{3}{4}$

2.2:3 a) $-\cos x^2 + C$
b) $\frac{1}{2}\sin^2 x + C$
c) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$
d) $\frac{1}{2}\ln\big(x^2+2x+2\big) + C$
e) $\frac{3}{2}\ln\big(x^2+1\big) + C$
f) $-2\cos\sqrt{x} + C$

2.2:4 a) $\frac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2} + C$
b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{x-1}{\sqrt{3}} + C$
c) $\frac{1}{2}\arctan\dfrac{x+2}{2} + C$
d) $x - \arctan x + C$

2.3:1 a) $-2(x+1)e^{-x} + C$
b) $-(x+1)\cos x + \sin x + C$
c) $2x\cos x + (x^2-2)\sin x + C$
d) $\frac{1}{2}x^2\big(\ln x - \frac{1}{2}\big) + C$

2.3:2 a) $2e^{\sqrt{x}}\big(\sqrt{x} - 1\big) + C$ b) $\frac{1}{2}$
c) $-\ln|\cos x| + C$
d) $x(\ln x - 1) + C$

Komplexa tal

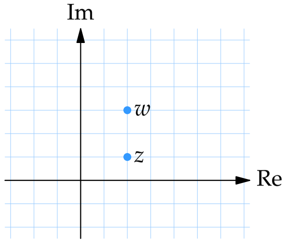
3.1:1 a) $8+3i$ b) $-2+4i$ c) $-3+2i$
d) $31+i$ e) $7-i$ f) $1-i$

3.1:2 a) $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ b) $-\frac{19}{26}+\frac{2}{13}i$
c) $-\frac{11}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{3}\,i$ d) $\frac{7}{130}-\frac{93}{65}i$

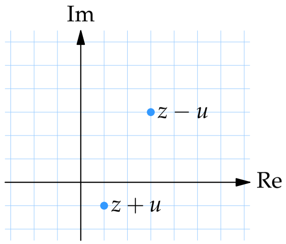
3.1:3 $a=-6$

3.1:4 a) $z=2+3i$ b) $z=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$
c) $z=2+i$ d) $z=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$
e) $z=\frac{2}{3}-i$ f) $z=3+i$

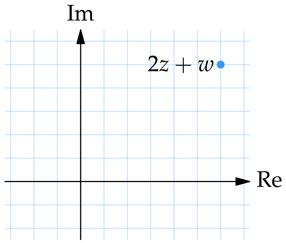
3.2:1 a)



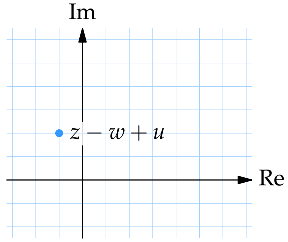
b)



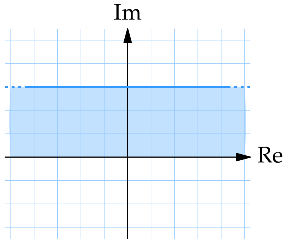
c)



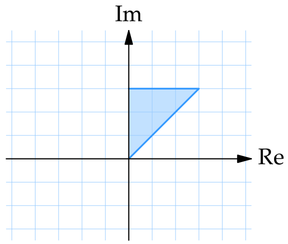
d)



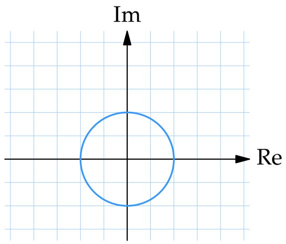
3.2:2 a)



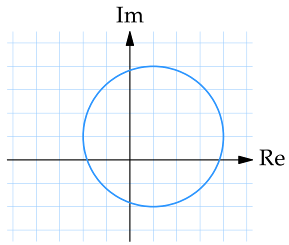
b)



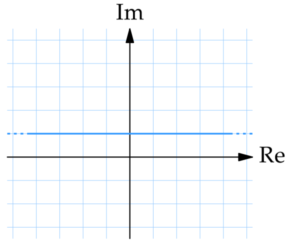
c)



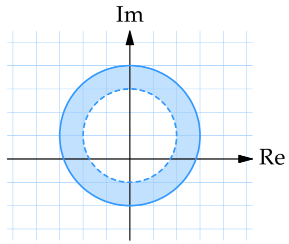
d)



e)



f)



3.2:3 $2+4i$

3.2:4 a) 5 b) $\sqrt{53}$ c) $5\sqrt{13}$
d) $5/\sqrt{13}$

3.2:5 a) π b) $\frac{3}{4}\pi$ c) $-\frac{1}{12}\pi$ eller $\frac{23}{12}\pi$
d) $\frac{1}{4}\pi$

3.2:6 a) $3(\cos 0+i\sin 0)$
b) $11\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$
c) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$
d) $2\sqrt{10}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
e) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
f) $\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

3.3:1 a) -64 b) 1 c) $2^{65}+2^{65}\sqrt{3}\,i$
d) -64 e) $\frac{1}{32}\sqrt{3}-\frac{1}{32}i$

3.3:2 a) $z=\pm 1,\quad z=\pm i$
b) $z=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i,\quad z=-1$
c) $z=2^{1/10}\exp\left(\frac{\pi i}{4}+\frac{2k\pi i}{5}\right)$
för $k=0,1,2,3,4.$
d) $z=2\pm i,\quad z=\pm i$
e) $z=\pm 1$

3.3:3 a) $(z+1)^2+2$
b) $\left(z+\frac{3}{2}i\right)^2+2$
c) $-(z-2+i)^2+4(1-i)$
d) $i\left(z+\frac{3}{2}-i\right)^2-4-\frac{5}{4}i$

3.3:4 a) $z=\pm(1+i)/\sqrt{2}$ b) $z=2\pm i$
c) $z=-1\pm i\sqrt{2}$
d) $z=(1\pm i\sqrt{15})/4$

3.3:5 a) $z=2+1,\quad z=i$
b) $z=1+i,\quad z=1-2i$
c) $z=2+i,\quad z=-1+2i$
d) $z=i,\quad z=1+4i$

3.3:6 $$z=\begin{cases}\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}+2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}+2}-i\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\end{cases}$$
Uttrycket: $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

3.4:1 a) $x+1$ b) $x-1+\dfrac{1}{x+1}$
c) x^2-ax+a^2 d) x^2-x+2
e) $x-1+\dfrac{2x+2}{x^2+3x+1}$

3.4:2 $z=1\pm i$

3.4:3 $z=-1\pm i,\quad z=\pm 2i$

3.4:4 Välj $a=1$ och $b=10$.
Lösningar: $z=1\pm 2i,\quad z=-2.$

3.4:5 Två fall:
1. Välj $a=8$ och $b=-3$.
Lösningar: $z=1$ (trippelrot), $z=-3$.

2. Välj $a = -8$ och $b = -3$.
   Lösningar: $z = -1$ (trippelrot),
   $z = 3$.

3.4:6 $z = \pm i\sqrt{6}, \quad z = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{29}$

3.4:7 a) $(z-1)(z-2)(z-4)$
$= z^3 - 7z^2 + 14z - 8$

b) $(z+1-i)(z+1+i)$
$= z^2 + 2z + 2$