16.8. Basbyte

I det här avsnittet kommer vi att gå från en bas till en annan, dvs vi kommer att utföra vad vi kallar för **basbyte**.

Exempel 16.46. Låt $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ och $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ vara två givna baser i ett vektorrum V. Vi tänker oss dessutom att vi känner till sambandet mellan dessa baser, t.ex via

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{f}_3 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases} \tag{16.13}$$

Vidare skulle vi kunna betrakta $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ som en "**ny**" bas given i en "**gammal**" bas $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Eftersom

$$\boldsymbol{f}_1 = 1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{och} \qquad \boldsymbol{f}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så kan sambandet (16.13) skrivas på matrisform:

$$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \underbrace{0}_{=\boldsymbol{f}_1} & \underbrace{0}_{=\boldsymbol{f}_2} & \underbrace{1}_{=\boldsymbol{f}_3} \end{pmatrix}.$$

Detta kallas för **Bassambandet** mellan $\underline{\boldsymbol{e}}$ och $\underline{\boldsymbol{f}}$ och skrivs

$$\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T \tag{16.14}$$

Matrisen T kallas **transformationsmatrisen** (eller **basbytesmatrisen**) för basbytet i (16.14)

Lägg märke till att koordinaterna för $\boldsymbol{f}_j$:na, $j = 1, 2, 3$ är uppställda som kolonner i T. Eftersom $\boldsymbol{f}_j$:na är en bas, så är dessa kolonner linjärt oberoende vilket medför att matrisen T är inverterbar. I det här exemplet är inversen till T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det **omvända bassambandet** ges därför av

$$\underline{\boldsymbol{e}} = \underline{\boldsymbol{f}}T^{-1}$$

eller komponentvis:

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 \end{cases}$$

Om $\boldsymbol{u}$ är en godtycklig vektor i V given i såväl den gamla basen med gamla koordinater X, dvs $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X$, som i den nya basen med nya koodinater Y, dvs $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{f}}Y$, så erhåller vi

$$\underline{\boldsymbol{e}}X = \boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{f}}Y \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\boldsymbol{e}}X = \underline{\boldsymbol{f}}Y.$$

Använder vi bassambandet i (16.14), så får vi

$$\underline{\boldsymbol{e}}X = \underline{\boldsymbol{f}}Y \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\boldsymbol{e}}X = \underline{\boldsymbol{e}}TY \qquad \Leftrightarrow \qquad X = TY.$$

Detta ger **koordinatsambandet**

$$X = TY \qquad \Leftrightarrow \qquad Y = T^{-1}X. \tag{16.15}$$

Komponentvis kan detta skrivas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & y_1 & + & y_2 & + & y_3 \\ x_2 & = & & & y_2 & + & y_3 \\ x_3 & = & & & & & y_3 \end{array}\right. \qquad \text{eller} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} y_1 & = & x_1 & - & x_2 & & \\ y_2 & = & & & x_2 & - & x_3 \\ y_3 & = & & & & & x_3 \end{array}\right.$$

Låt oss se vilka koordinater vektorn $\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ har i den nya basen given i (16.14). Enligt koordinatsambandet (16.15), så ges de nya koordinaterna av

$$Y = T^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så att $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3$ i nya basen. □

Exempel 16.47. Låt $\underline{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ vara en bas i $\mathbf{R}^3$. Visa att vektorerna

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{f}_2 &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{f}_3 &= \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

bildar en ny bas i $\mathbf{R}^3$. Bestäm bassambandet och koordinatsambandet mellan den gamla och den nya basen. Bestäm också koordinaterna för $\boldsymbol{u} = 6\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_3$ i den nya basen.

Lösning: Mängden $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ är linjärt oberoende, ty systemet

$$\lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{f}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{f}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

har endast den triviala lösningen. Alltså är $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ en ny bas i $\mathbf{R}^3$.
Bassambandet blir då

$$\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{e}T \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ \underbrace{1}_{=\boldsymbol{f}_1} & \underbrace{-1}_{=\boldsymbol{f}_2} & \underbrace{1}_{=\boldsymbol{f}_3} \end{pmatrix}.$$

Koordinatsambandet får vi ur (16.15), så att om vi låter en godtycklig vektor $\boldsymbol{u}$ ha koordinaterna X i den gamla basen $\underline{e}$, dvs $\boldsymbol{u} = \underline{e}\,X$ och koordinaterna Y i den nya basen $\underline{\boldsymbol{f}}$, dvs $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{f}}\,Y$, följer att

$$X = TY \qquad Y = T^{-1}X.$$

Vektorn $\boldsymbol{u} = 6\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_3 = \underline{e} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ har i den nya basen koordinaterna Y som är lösningen till

$$TY = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 &= 4 \\ y_2 &= 0 \\ y_3 &= 2 \end{cases}$$

Ekvationssystemet ovan löser vi genom Gausselimination eller genom att invertera matrisen T. Alltså är $\boldsymbol{u} = 4\boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_3$ i nya basen $\underline{\boldsymbol{f}}$. □

Kalkylen miskar avsevärt då vi arbetar med ON-baser. T.ex. behöver vi inte invertera transformationsmatrisen T eftersom den är ortogonal då, dvs

$$T^tT = E \qquad \Leftrightarrow \qquad T^{-1} = T^t.$$

Detta visas i nästa sats.

Sats 16.48. Transformationsmatrisen mellan två ON-baser är ortogonal.

Bevis: Låt T vara transformationsmatrisen mellan ON-baserna $\underline{e}$ och $\underline{f}$ med bassambandet $\underline{f} = \underline{e}T$. Vi kommer att visa att

$$T^tT = E.$$

Betrakta elementet t_{jk} i matrisen T^tT. Enligt definitonen av multiplikation mellan matriser så gäller att

$$\begin{aligned} t_{jk} &= \text{rad j i matris } T^t \times \text{kolonn k i matris } T \\ &= \text{kolonn j i matris } T \times \text{kolonn k i matris } T \\ &= \boldsymbol{f}_j \cdot \boldsymbol{f}_k = \begin{cases} 1, & \text{om } j = k, \\ 0, & \text{om } j \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

vilket visar påståendet. □

Exempel 16.49. Låt $\underline{e}$ vara en ON-bas i $\mathbf{R}^3$. Då är mängden $\underline{f} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$, där

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 &= \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\Big) \\ \boldsymbol{f}_2 &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3\Big) \\ \boldsymbol{f}_3 &= \dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\Big) \end{cases}$$

en ny ON-bas i $\mathbf{R}^3$, ty dessa är både ortogonala och normerade. Bassambandet är då

$$\underline{f} = \underline{e}T \quad \text{där} \quad T = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Matrisen T är ortogonal, ty $TT^t = T^tT = E$. □