19.2. Multipliciteter

Sats 19.11. Sekularpolynomet $\det(A_{\underline{\boldsymbol{f}}} - \lambda E) = 0$ för en avbildningsmatris beror ej på valet av bas.

Bevis Låt $\underline{\boldsymbol{e}}$ och $\underline{\boldsymbol{f}}$ vara två baser med bassambandet $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$. Om $A_{\underline{\boldsymbol{e}}}$ och $A_{\underline{\boldsymbol{f}}}$ är avbildningsmatriserna i respektive bas, så är

$$\begin{aligned}
\det(A_{\underline{\boldsymbol{f}}} - \lambda E) &= \det(T^{-1}A_{\underline{\boldsymbol{e}}}T - \lambda E) \\
&= \det(T^{-1}(A_{\underline{\boldsymbol{e}}} - \lambda E)T) \\
&= \det T^{-1} \det(A_{\underline{\boldsymbol{e}}} - \lambda E) \det T \\
&= \frac{1}{\det T} \det(A_{\underline{\boldsymbol{e}}} - \lambda E) \det T \\
&= \det(A_{\underline{\boldsymbol{e}}} - \lambda E).
\end{aligned}$$

Alltså, $\det(A_{\underline{\boldsymbol{f}}} - \lambda E) = \det(A_{\underline{\boldsymbol{e}}} - \lambda E)$.

Definition 19.12. Om till ett egenvärde till F hör ett egenrum av dimension k, så säger vi att den **geometriska multipliciteten** är k. Den **algebraiska multipliciteten** är antalet gånger egenvärdet förkommer som nollställe till den sekularekvationen.

Sats 19.13. För en godtycklig avbildningsmatris gäller att alla algebraiska multipliciteter är $\geq$ än motsvarande geometriska.

För symmetriska avbildningar eller allmännare för diagonaliserbara avbildninger, så råder likhet i satsen ovan.

Sats 19.14. Om $F : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ är diagonaliserbar så är alla geometriska och algebraiska multipliciteter lika.

Exempel 19.15. Vi går tillbaka till Exempel 18.14 och studerar den algebraiska respektive geometriska multipliciteten.

1. $\det(A - \lambda E) = 0$ om $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 12$ och $\lambda_3 = 18$, dvs den algebraiska multipliciteten är 3. Egenrummen till λ_1, λ_2 och λ_3 är tillhörande egenvektorer $(1,1,1)^t$, $(1,0,-1)^t$ samt $(1,-2,1)^t$. Den geometriska multiplicitetn är också 3.

2. Eftersom $\det(B - \lambda E) = 0$ för $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 1$, så är den algebraiska multipliciteten 3. Egenrummet till λ_1 är egenvektorn $(1,-1,2)^t$ och till λ_2 och λ_3 planet $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Den geometriska multipliciteten är alltså 3.

3. Det följer att $\det(C - \lambda E) = 0$ för $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Därmed är den algebraiska multipliciteten 3. Egenrummet till λ_1, λ_2 och λ_3 består endast egenvektorn $(2, 0, -1)^t$; vilket betyder att den geometriska multipliciteten är alltså 1.

4. Den algebraiska multipliciteten är 3 då $\det(D - \lambda E) = 0$ för $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Den geometriska multipliciteten är däremot 2, ty egenrummet är alla vektorer i planet $x_2 = 0$.