16.6. Sammansatta linjära avbildningar

Definition 16.34. Låt $F, G : V \to V$. Vi definierar sammansättningen F följt av G genom
$$H(\boldsymbol{u}) = G(F(\boldsymbol{u})).$$
Andra beteckningar som förekommer är $H = G \circ F$ och $H = GF$. Speciellt menas med
$$F^2(\boldsymbol{u}) = F(F(\boldsymbol{u})).$$

Låt A och B vara F:s respektive G:s matriser i en bas $\underline{\boldsymbol{e}}$ i V. Antag att $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X$ är en godtycklig vektor i V. Då vet vi att
$$F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}}AX$$
och
$$G(\underline{\boldsymbol{e}}Y) = \underline{\boldsymbol{e}}BY.$$
Sammansättningen ges då av
$$H(\boldsymbol{u}) = H(\underline{\boldsymbol{e}}X) = GF(\underline{\boldsymbol{e}}X) = G(F(\underline{\boldsymbol{e}}X)) = G(\underline{\boldsymbol{e}}AX) = \underline{\boldsymbol{e}}BAX = \underline{\boldsymbol{e}}BY,$$
där vi satt $Y = AX$. Matrisen till den sammansatta avbildningen GF är alltså BA.

Exempel 16.35. Låt $V = E^3$ och antag att $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ är en ON-bas i E^3. Om F är en ortogonal projektion på $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$-planet och G är en vridning moturs vinkeln π kring en rotationsaxel parallell med $\boldsymbol{e}_3$, så ges avbildningsmatriserna till F och G av A respektive B av
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Den sammansatta avbildningen GF har därmed avbildningsmatrisen
$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$