16.9. Linjära avbildningar och basbyte

Exempel 16.50. Antag att $\underline{\boldsymbol{e}}$ och $\underline{\boldsymbol{f}}$ är baser i ett vektorrum V med $\dim V = n$. Låt $\boldsymbol{u}$ vara en vektor i V med gamla koordinater X i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ och nya koordinater Y i basen $\underline{\boldsymbol{f}}$, dvs

$$\underline{\boldsymbol{e}}X = \boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{f}}Y$$

med bassambandet

$$\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$$

och koordinatsambandet

$$X = TY \qquad \text{dvs} \qquad Y = T^{-1}X.$$

Låt nu $F : V \to V$ vara en linjär avbildning. Antag att F har avbildningsmatrisen A_e i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ och A_f i basen $\underline{\boldsymbol{f}}$, dvs

$$F(\boldsymbol{u}) = F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}}A_eX, \tag{16.16}$$

och

$$F(\boldsymbol{u}) = F(\underline{\boldsymbol{f}}Y) = \underline{\boldsymbol{f}}A_fY. \tag{16.17}$$

Eftersom vänstra leden i (16.16) och (16.17) är lika, måste även högra leden vara lika

$$\underline{\boldsymbol{e}}A_eX = \underline{\boldsymbol{f}}A_fY. \tag{16.18}$$

Utnyttjar vi bassambandet $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$ i (16.18), får vi

$$\underline{\boldsymbol{e}}A_eX = \underline{\boldsymbol{f}}A_fY \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\boldsymbol{e}}A_eX = \underline{\boldsymbol{e}}TA_fY,$$

dvs

$$A_eX = TA_fY. \tag{16.19}$$

Slutligen, fås då vi sätter in koordinatsambandet $Y = T^{-1}X$ i (16.19) att

$$A_eX = TA_fT^{-1}X \qquad \text{dvs} \qquad A_e = TA_fT^{-1}.$$

Vi sammanfattar resultatet i Exempel 16.50:

Sats 16.51. Låt F vara en linjär avbildning med avbildningsmatriserna A_e och A_f i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ resp. basen $\underline{\boldsymbol{f}}$. Då ges sambandet mellan matriserna A_e och A_f av:

$$A_{\boldsymbol{e}} = TA_{\boldsymbol{f}}T^{-1} \qquad \text{eller} \qquad A_{\boldsymbol{f}} = T^{-1}A_{\boldsymbol{e}}T. \tag{16.20}$$

Vidare, om $\underline{\boldsymbol{e}}$ och $\underline{\boldsymbol{f}}$ är ON-baser, så är

$$A_{\boldsymbol{e}} = TA_{\boldsymbol{f}}T^t \qquad \text{eller} \qquad A_{\boldsymbol{f}} = T^tA_{\boldsymbol{e}}T. \tag{16.21}$$

□

Exempel 16.52. Den linjära avbildningen F har i ON-basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ i $\mathbf{R}^3$ matrisen

$$A_e = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -1 \\ -4 & 14 & -4 \\ -1 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen för F i den bas som ges av

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 & = & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\Big) \\ \boldsymbol{f}_2 & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3\Big) \\ \boldsymbol{f}_3 & = & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\Big) \end{cases}$$

Lösning: Enligt Exempel 16.49, så är den nya mängden $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ en ny ON-bas för $\mathbf{R}^3$. Basbytet är mellan två ON-baser med en ortogonal tranformationsmatrisen:

$$\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T \quad \text{där} \quad T = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt Sats 16.21 gäller sambandet $A_{\boldsymbol{f}} = T^t A_{\boldsymbol{e}} T$ mellan matriserna till F i de olika baserna F:s matris i basen $\underline{\boldsymbol{f}}$ är då

$$\begin{aligned} A_{\boldsymbol{f}} &= T^t A_{\boldsymbol{e}} T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -4 & -1 \\ -4 & 14 & -4 \\ -1 & -4 & 11 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jämför med Exemepl 16.9; då vi sökte bestämma λ, så att systemet $AX = \lambda X$ hade andra lösningar än nollösningen. Vi fick då $\lambda = 6$ med tillhörande lösning $X_1 = (1, 1, 1)^t$, $\lambda = 12$ med tillhörande lösning $X_2 = (1, 0, -1)^t$ och $\lambda = 18$ med tillhörande lösning $X_3 = (1, -2, 1)^t$. Observera nu att $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ och $\boldsymbol{f}_3$ är just X_1, X_2 resp. X_3 normerade. $\square$