16.11. Rotation

Vi har tidigare i Exempel 16.28 visat hur man roterar rummets vektorer kring en axel parallell med en av basvektorerna. Nu är vi redo att besvara frågan om hur man vrider kring en godtycklig vektor i rummet.

Exempel 16.60. Låt L vara en linje i rummet genom origo och med riktningsvektorn $\boldsymbol{v}$, dvs $L: \ t\boldsymbol{v}$. Antag att vi vill bestämma matrisen för rotationen R vinkeln θ moturs kring en axel parallell med L. Vi behöver införa en ny ON-bas $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ lämplig för att reducera problemet till fallet i Exempel 16.28. Eftersom vektorn $\boldsymbol{v}$ vrids på sig själv, normerar vi den och väljer första basvektorn

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}.$$

Vidare, vridningen sker i det plan som har $\boldsymbol{v}$ som normal, därför väljer vi en enhetsvektor $\boldsymbol{f}_2$ ortogonal mot $\boldsymbol{v}$. Sista basvektorn $\boldsymbol{f}_3$ väljer vi så att basen $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ bildar ett högerorienterat system genom

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2.$$

Observera att av definitionen för vektorprodukt följer att

$$|\boldsymbol{f}_3| = |\boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2| = |\boldsymbol{f}_1| \cdot |\boldsymbol{f}_2| \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

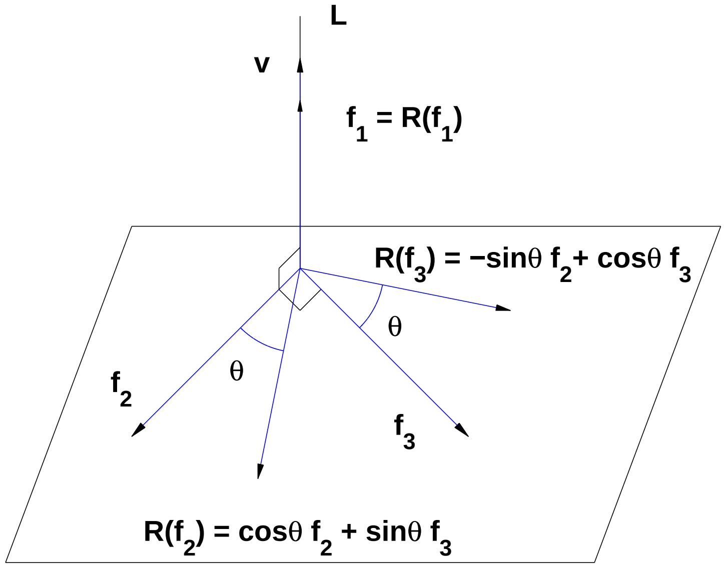
dvs $\boldsymbol{f}_3$ är också en enhetsvektor. Situationen är nu densamma som finns i Exempel 16.28 och då ges avbildningsmatrisen för rotaionen vinkeln θ moturs kring en axel parallell med förstabasvektorn $\boldsymbol{f}_1$ av

$$A_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Om T är transformationsmatrisen mellan ON-baserna $\underline{\boldsymbol{e}}$ och $\underline{\boldsymbol{f}}$, dvs $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$, så gäller enligt (16.21) att matrisen i den ursprungliga basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ ges av

$$A_e = TA_fT^{-1}.$$

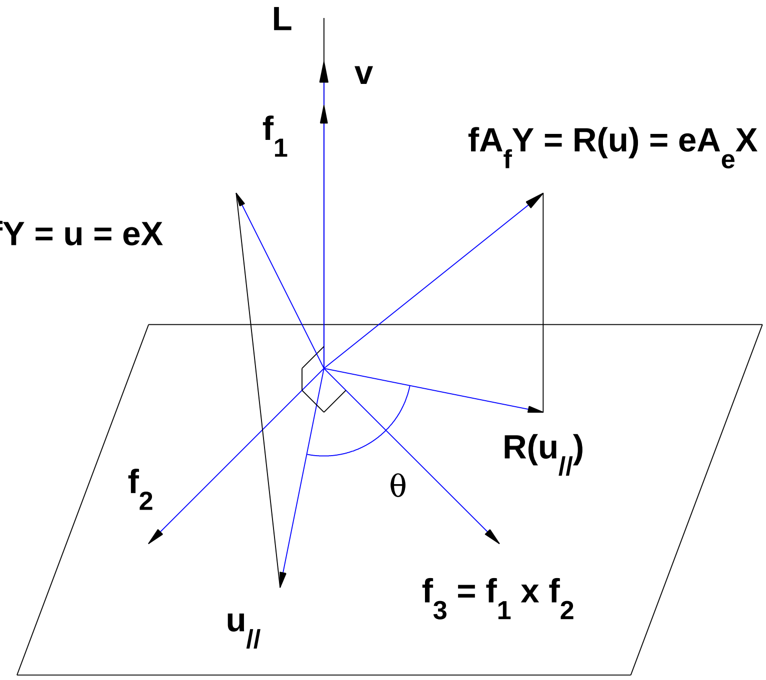
Figur 16.61.



Exempel 16.62. Bestäm matrisen för en rotation $\frac{\pi}{3}$ kring axeln $L:\ t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösning:

Figur 16.63.



Låt $\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Då kan vi t.ex. välja $\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vidare låter vi $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2 == \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, så att $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ är ON-bas i ett högerorienterat system.

Bassambandet ges av $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$, där $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ är ortogonal.

Avbildningsmatrisen $A_{\boldsymbol{f}}$ i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ ges som bekant av

$$A_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \{\theta = \pi/3\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Avbildningsmatrisen $A_{\boldsymbol{e}}$ i basen $\underline{e}$ ges då av

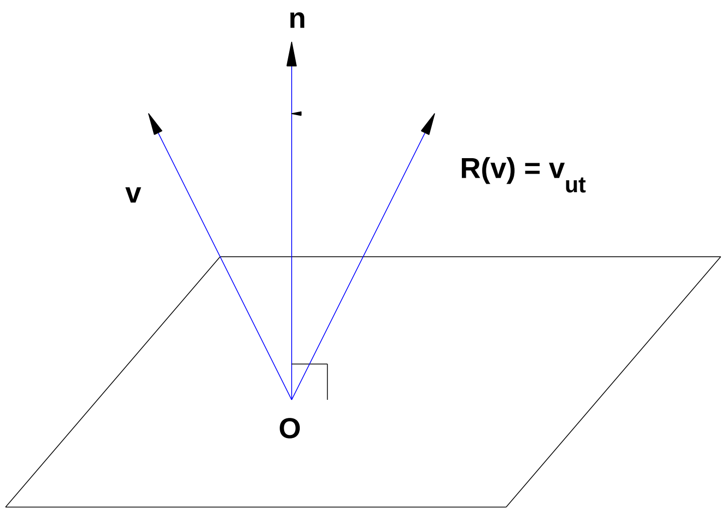
$$A_{\boldsymbol{e}} = TA_{\boldsymbol{f}}T^t = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 13 & 4+3\sqrt{3} & -2+6\sqrt{3} \\ 4-3\sqrt{3} & 13 & -2-6\sqrt{3} \\ -2-6\sqrt{3} & -2+6\sqrt{3} & 10 \end{pmatrix}.$$

Observera att A är ortogonal och $\det A_{\boldsymbol{e}} = 1$. □

Exempel 16.64. (**Reflektion av en ljusstråle i ett plan**) En ljusstråle faller in mot origo och har riktningen $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Den reflekteras mot planet $x + y + z = 0$. Bestäm ekvationen för den reflekterade strålen. Koordinatsystemet är ortonormerat.

Lösning:

Figur 16.65.



Låt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ vara en ON-bas i rummet. Vi betraktar problemet som att vrida vektorn $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vinkeln π kring normalen, dvs vi söker bilden $R(\boldsymbol{v})$ av $\boldsymbol{v}$ under rotationen R. Normalen som alltså är rotationsaxel avbildas på sig själv.

Låt därför $\boldsymbol{f}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vara den första nya basvektorn med längd 1.

Vi väljer den andra basvektorn $\boldsymbol{f}_2$ ortogonal mot $\boldsymbol{f}_1$ och med längd 1. Vi tar t.ex. $\boldsymbol{f}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Till sist väljer vi den tredje basvektorn $\boldsymbol{f}_3$ ortogonal mot både $\boldsymbol{f}_1$ och $\boldsymbol{f}_2$ och med längd 1. Vi får inte heller glömma att $\boldsymbol{f}_3$ ska väljas på ett sådant sätt att vi får ett positivt höger orienterat system. Därför låter

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bassambandet ges alltså av $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}} T$, där $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ är ortogonal.

Låt nu $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ och $\boldsymbol{f}_3$ rotera:

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{f}_1) &= \boldsymbol{f}_1 &= 1\boldsymbol{f}_1 + 0\boldsymbol{f}_2 + 0\boldsymbol{f}_3 &= \underline{\boldsymbol{f}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ R(\boldsymbol{f}_2) &= -\boldsymbol{f}_2 &= 0\boldsymbol{f}_1 - 1\boldsymbol{f}_2 + 0\boldsymbol{f}_3 &= \underline{\boldsymbol{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ R(\boldsymbol{f}_3) &= -\boldsymbol{f}_3 &= 0\boldsymbol{f}_1 + 0\boldsymbol{f}_2 - 1\boldsymbol{f}_3 &= \underline{\boldsymbol{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Avbildningsmatrisen i basen $\underline{\boldsymbol{f}}$ är alltså $A_{\underline{\boldsymbol{f}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Sambandet mellan avbildningsmatriserna ger att avbildningsmatrisen i basen $\underline{e}$:

$$A_{\underline{\boldsymbol{e}}} = T A_{\underline{\boldsymbol{f}}} T^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observera att $A_{\underline{\boldsymbol{e}}}$ i det här fallet inte bara är ortogonal utan också symmetrisk. Detta eftersom problemet kan också ses som en spegling som har en symmetrisk avbildningsmatris. Den utreflekterade strålen har riktningen

$$A_{\underline{\boldsymbol{e}}}\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}\, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observera att avbildningsmatrisen är ortogonal med determinant 1. $\square$

Anmärkning 16.66. Exemplen ovan visar att om avbildningsmatrisen A är

1. symmetrisk och $\det A = 0$, så är avbildningen en projektion. Om dimensionen för nollrummet är 1 (eller 2) så är det ortogonal projektion i plan (eller linje).

2. symmetrisk och $\det A = -1$, så är avbildningen en spegling i ett plan.

3. symmetrisk och $\det A = 1$, så är avbildningen en spegling i en linje eller en rotation vinkel π.

4. ortogonal och därmed $\det A = 1$, så är avbildningen en rotation.

Exempel 16.67. Följande matriser svarar mot en projektion, en spegling eller en rotation. Avgör vilken som svarar mot vilken avbildning om

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

1. Eftersom A är ortogonal med $\det A = 1$, så är A matrisen för en rotation R i rummet.

2. B är symmetrisk med $\det B = -1$. Alltså är B matrisen för en spegling S i ett plan.

3. C är en matris för en projektion P, ty C är symmetrisk med $\det C = 0$. Vidare gäller att $N(P) = [(1, 2, 3)^t]$ och $\dim N(P) = 1$. Alltså är C matrisen för en projektion P på ett plan med normalvektorn $(1, 2, 3)^t$. □