Linköpings universitet
ITN, Campus Norrköping
Univ lekt George Baravdish

11.1. Se Exemepl 10.55.

11.2. Se Exempel 10.67.

a) $U = [\boldsymbol{u}_1 = (1,0,2,1)^t, \boldsymbol{u}_2 = (1,1,0,1)^t, \boldsymbol{u}_3 = (2,1,2,1)^t]$. Visa att mängden $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ är linjärt oberoende, så att $\dim U = 3$.
Vi fyller ut $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ med $\boldsymbol{u}_4 \notin U$ till en bas $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ för hela $\mathbf{R^4}$.
Alternativ 1: Mängden $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ skall vara linjärt oberoende:

$$\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2+\lambda_3\boldsymbol{u}_3 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & ? & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ? & 0 \\ 2 & 0 & 2 & ? & 0 \\ 1 & 1 & 1 & ? & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & ? & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ? & 0 \\ 0 & -2 & 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ? & 0 \end{array}\right).$$

T.ex. kan vi välja $\boldsymbol{v}_4 = (1,0,0,0)^t$, ty

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Alltså är mängden $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ en bas för hela $\mathbf{R^4}$.

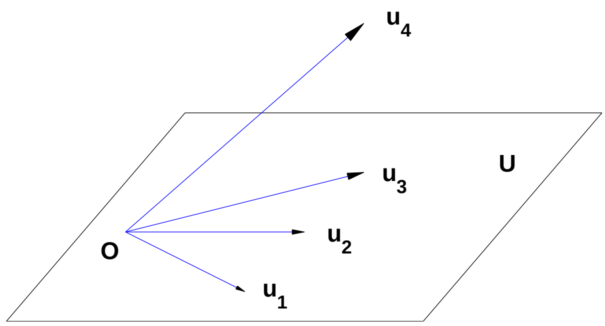
Alternativ 2: Eftersom U har en deminsion upp till $\mathbf{R^4}$ är U ett hyperplan i $\mathbf{R^4}$. Vi bestämmer därför ekvationen för linjära höljet U:
En vektor $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in U$ om det finns tal λ_1, λ_2 och λ_3, så att

$$\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2+\lambda_3\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 0 & 2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 2x_1 + 2x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_4 - x_1 \end{array}\right).$$

Alltså för att en $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ ska få ligga i U, så måste dess koordinater uppfylla ekvationen $2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$. Vi har därmed visat att

$$[(1,0,2,1)^t, (1,1,0,1)^t, (2,1,2,1)^t] = U = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R^4} : 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0.\}.$$

En vektor $\boldsymbol{u}_4 \notin U$ är en vektor vars koordinator inte uppfyller ekvationen. T.ex. kan vi välja $\boldsymbol{u}_4 = (1,0,0,0)^t$. Den utvidgade mängden $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ är nu en bas för hela $\mathbf{R^4}$.



b) $V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4]$. Vi undersöker linjärt oberoende:

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\lambda_3\boldsymbol{v}_3+\lambda_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sätter vi $\lambda_4 = t$, $\lambda_3 = s$, får vi $\lambda_2 = -2s - 3t$ och $\lambda_1 = 3s + 4t$. Insatt i relationen får vi

$$(3s + 4t)\boldsymbol{v}_1 + (-2s - 3t)\boldsymbol{v}_2 + s\boldsymbol{v}_3 + t\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Väljer vi $s = 0$ och $t = 1$ får vi linjärkombinationen

$$4\boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{v}_4 = -4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2.$$

Väljer vi däremot $s = 1$ och $t = 0$ får vi linjärkombinationen

$$3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{v}_3 = -3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2.$$

Alltså klarar vi oss utan $\boldsymbol{v}_3$ och $\boldsymbol{v}_4$ och det gäller att

$$V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$$

samt att $\dim V = 2$. Vi utvidgar med $\boldsymbol{v}'_3$ och $\boldsymbol{v}'_4$ som inte ligger i V, så att $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}'_3, \boldsymbol{v}'_4\}$ blir en bas för hela $\mathbf{R}^4$.

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\lambda_3\boldsymbol{v}'_3+\lambda_4\boldsymbol{v}'_4 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & ? & ? & 0 \\ -1 & -1 & ? & ? & 0 \\ 2 & 3 & ? & ? & 0 \\ 1 & 2 & ? & ? & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & ? & ? & 0 \\ 0 & 1 & ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & ? & ? & 0 \end{array}\right).$$

Väljer vi $\boldsymbol{v}'_3 = (0, 1, 0, 0)^t$ och $\boldsymbol{v}'_3 = (0, 0, 0, 1)^t$, så gäller

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

c) Vi parametriserar W och bestämmer därmed riktningsvektorerna som är en bas för W.
Sätt $x_4 = t$, $x_3 = s$ och $x_2 = r$ får vi att $x_1 = -x_3 + 2x_4 = -s + 2t$, dvs

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = r(0,1,0,0)^t + s(-1,0,1,0)^t + t(2,0,0,1)^t.$$

Dessa är linjärt oberoende så att $\dim W = 3$. Utvidga med $(0,0,0,1)^t \notin W$ till en bas för hela $\mathbf{R}^4$.

11.3. Redovisningsuppgift.

11.4. se Exempel 10.69.

11.5. Se Exempel D i Temadag 4.
Låt $U = [\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1)^t, \boldsymbol{u}_2 = (1,0,-1)^t]$ och $V = [\boldsymbol{v}_1 = (2,1,1)^t, \boldsymbol{v}_2 = (1,0,1)^t]$.
Vi söker alltså snittmängden

$$U \cap V = \{\text{alla vektorer som ligger i både } U \text{ och } V\},$$

dvs

$$U \ni \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u} = \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2 \in V.$$

Samlas termerna i vänstra ledet får vi ett ekvationssystem i de obekanta λ_1, λ_2, $-\mu_1$ och $-\mu_2$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som har lösningen $\lambda_1 = 2t$, $\lambda_2 = t$, $\mu_1 = 2t$ och $\mu_2 = -t$. Detta ger att $\boldsymbol{u} = t(3,2,1)^t$. Alltså är underrummet $U \cap V = [(3,2,1)^t]$ en linje genom origo. Riktningsvektorn $(3,2,1)^t$ spänner upp underrummet och är därmed bas för detta rum.

Alternativ 2: Underrummet U är ett plan genom origo med normalen $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = (1,-2,1)^t$, dvs

$$U = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 : \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

På samma sätt följer att $V = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Snittmängden $U \cap V$ är alla gemensamma vektorer som finns i både U och V, dvs $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3)^t$ ligger i U och V om

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

Detta system har lösningen $\boldsymbol{u} = t(3,2,1)^t$.

11.6. a) Se Exempel 10.10. Kalla mängden M_1. Polynomen $1 + x + 3x^4$ och $x^3 + x^4$ tillhör M_1. Dock tillhör elementen $1 + x^3$, $x^2 + x^8$, $\sin x$ och $\dfrac{1}{x+1}$ ej M_1. Vi undersöker om summan av 2 godtyckliga polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ och $q(x) = q_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4$ för ut oss ur mängden M_1 eller inte. Vi har att

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_4 + b_4)x^4. \quad (0.1)$$

Väljer vi koefficienterna a_4 och $b_4 = -a_4$ så att $a_4 + b_4 = 0$, vilket är fullt möjligt, får vi ett 3:e grads polynom i summan (0.1). Alltså är M_1 inte ett linjärt rum.

b) Kalla mängden M_2. Om $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ och $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ är 2 godtyckliga matriser i M_2, så är också summan $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{3\times 3}$ samt multiplikationen $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{3\times 3}$ matriser i M_2.

c) Kalla mängden M_3. Funktionerna $f(x) = x + x^3$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin 3x$ ligger i M_3 men inte $f(x) = \ln x$, $f(x) = \sqrt{x}$ och $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Låt f och g vara 2 godtyckliga funktioner i M_2. Då är $f(x) + g(x)$ samt $\lambda f(x)$ också funktioner med definitionsmängden intervallet $[-1, 1]$, dvs ligger i M_3.

c) Kalla mängden M_4. Exempel på element i M_4 är $f(x) = 1$, $f(x) = 5x - 4$ och $f(x) = x^8$ men inte $f(x) = 1 + x$ och $f(x) = \sin x$. Om $f, g \in M_4$, så är $f(1) + g(1) = 2 \neq 1$, dvs $f + g \notin M_4$.

c) Kalla mängden M_5. T.ex., tillhör $x^2 - 3x + 2$ och $\sin(\pi x)$ mängden M_5 men inte $f(x) = x$. M_5 är ett linjärt rum då för 2 godtyckliga $f, g \in M_5$ gäller att $f + g \in M_5$ och $\lambda f \in M_5$, ty $f(1) + g(1) = 0$ och $\lambda f(1) = 0$.

11.7. a) och b) Se Exempel 10.14 samt Exempel A. i Temadag 4.

c) Kalla mängden W_1. Då består W_1 av de gemensamma vektorer i de båda planen, dvs snittmängden. En vektor $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3)^t$ tillhör alltså W_1 om dess koordinater uppfyller de båda planens ekvationer, dvs

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ \quad\quad x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

Sätt $x_3 = t$. Då är $x_2 = t$ och $x_1 = -t$. Därmed är $\boldsymbol{u} = t(-1, 1, 1)^t$ den vektor som spänner upp W_1, dvs $W_1 = [(-1, 1, 1)^t]$ är en linje genom origo. W_1 är ett underrum.

d) Kalla mängden W_2. För 2 godtyckliga vektorer $\boldsymbol{u} = (0, x_2, x_3)^t \in W_2$ och $\boldsymbol{v} = (y_1, 0, y_3)^t \in W_2$ gäller att $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (y_1, x_2, x_3)^t \notin W_2$. Alltså är W_2 inte ett underrum.

11.9. **Alternativ 1:** Genom att sätt in de 4 punkterna i ekvationen fås ett 4×5 ekvationssystem i de obekanta A, B, C, D och E. Detta är ett underbestämd ekvationssystem med färre ekvationer än obekanta som alltid har icke-trivial lösning.

Alternativ 2: Kalla hyperplanet W. Bildar vi vektorer som utgår från $P_0 = (1, 1, 1, 1)$ får vi

$$\boldsymbol{u}_1 = \overrightarrow{P_1P_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = P_2P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = P_3P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dessa är linjärt oberoende och då är $W = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]$. Vi bestämmer ekvationen för W. Punkten $Q = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ligger i W om vektorn

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{P_0Q} = (x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1, x_4 - 1)^t \in W$$

dvs

$$\boldsymbol{u}=\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2+\lambda_3\boldsymbol{u}_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & x_1-1 \\ 2 & 4 & 0 & x_2-1 \\ 1 & 3 & 2 & x_3-1 \\ 1 & 5 & 3 & x_4-1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 3 & -1 & x_1-1 \\ 0 & -2 & 2 & -2x_1+x_2-1 \\ 0 & 0 & 3 & x_3-x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1+x_2-2x_3+x_4+1 \end{array}\right)$$

Alltså $Q \in W$ om Q uppfyller

$$x_1-x_2+2x_3-x_4=1.$$

11.10. Vektorerna är linjärt beroende om det finns tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och λ_4 ej alla noll så att

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\lambda_3\boldsymbol{v}_3+\lambda_4\boldsymbol{v}_4=\mathbf{0}.$$

Denna relation kan på matrisform skrivas

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ a & a & 2 & 1 \\ a & a & a & 2 \\ a & 1 & 2 & a \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{\lambda}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}.$$

Enligt Sats 8.17 har systemet $A\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$ den entydiga lösningen $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$ om $\det A \neq 0$ och därmed är M linjärt oberoende. Vi bryter ut a från kolonn 1:

$$\det A = a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & a & a & 2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \end{vmatrix}.$$

Utveckla efter kolonn 1 och bryt ut $a-1$ från rad 2. Ta Kolonn 2 minus kolonn 1:

$$\det A = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot a\cdot(a-1)\cdot\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-2 \end{vmatrix} = a(a-1) = a(a-1)\begin{vmatrix} a-1 & 2-a & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-2 \end{vmatrix}.$$

Utveckla efter rad 2:

$$\det A = (-1)^{2+1}a(a-1)\cdot 1(-(a-2)^2+1)=0$$

för $a=1$ eller $a=3$. Alltså är vektorerna linjärt beroende om $a=0,1,3$.

11.11. Vektorerna är linjärt beroende om det finns tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och λ_4 ej alla noll så att

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\lambda_3\boldsymbol{v}_3+\lambda_4\boldsymbol{v}_4=\mathbf{0}.$$

Dvs

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

som har lösningen $\lambda_4=t$, $\lambda_3=-t$, $\lambda_2=0$ och $\lambda_1=-t$. Alltså gäller relationen

$$-t\cdot\boldsymbol{v}_1+0\cdot\boldsymbol{v}_2-t\cdot\boldsymbol{v}_3+t\cdot\boldsymbol{v}_4=\mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_4=\mathbf{0}.$$

Vi ser att $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_4-\boldsymbol{v}_1$ men att $\boldsymbol{v}_2$ inte är en linjärkombination i de övriga.

11.12 a) Sätt $x_4 = t$, $x_3 = s$, och $x_2 = r$. Då är $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in U$ om

$$\boldsymbol{u} = r\underbrace{(-1,0,0,0)^t}_{\boldsymbol{v}_1} + s\underbrace{(0,1,0,0)^t}_{\boldsymbol{v}_2} + t\underbrace{(0,0,0,1)^t}_{\boldsymbol{v}_3}.$$

$M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ spänner upp U samt är linjärt oberoende och därmed är en bas för U. Alltså $\dim U = 3$. Vi utvidgar M med $\boldsymbol{v}_4 \notin U$ till en bas för hela $\mathbf{R}^4$. T.ex., kan vi välja "normalen" $\boldsymbol{v}_4 = (1,1,0,0)^t$ till hyperplanet U.

b) Inlämningsuppgift.

11.13. Kalla elementen i U för $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$. Då gäller att $\boldsymbol{u} \in U$ om

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \lambda_3\boldsymbol{u}_3.$$

V är skärningsmängden mellan planen $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$ och $x_1+2x_2+x_3+3x_4 = 0$, dvs

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

Sätter vi $x_4 = \mu_1$ får vi $x_2 = -2\mu_1$ och $x_3 = \mu_2$ får vi $x_1 = \mu_1 - \mu_2$, så att $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in V$ om

$$\boldsymbol{u} = \mu_1\underbrace{(1,-2,0,1)^t}_{\boldsymbol{v}_1} + \mu_2\underbrace{(-1,0,1,0)^t}_{\boldsymbol{v}_2},$$

ty $V = [(-3,1,0,1)^t, (-1,,1,0,0)^t]$. Vi söker nu $U \cap V$ som är mängden av alla

$$\mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \lambda_3\boldsymbol{u}_3.$$

Löser vi detta system får vi att $\boldsymbol{u} = t(-2,-2,3,1)^t$. Alltså är $U \cap V = [(-2,-2,3,1)^t]$.

11.15. Vi visar $U = V$ genom att visa att U ligger i V, dvs $U \subset V$, samt att V ligger i U, dvs $V \subset U$.

1. $U \subset V$: Eftersom

$$\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = -\frac{2}{7}\boldsymbol{v}_1 - \frac{5}{7}\boldsymbol{v}_2$$

och

$$\boldsymbol{u}_2 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = -\frac{3}{7}\boldsymbol{v}_1 - \frac{4}{7}\boldsymbol{v}_2,$$

så kommer varje $\boldsymbol{u} = s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 \in U$ att också tillhöra V, ty

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 = -\frac{2}{7}s\boldsymbol{v}_1 - \frac{5}{7}s\boldsymbol{v}_2 - \frac{3}{7}t\boldsymbol{v}_1 - \frac{4}{7}t\boldsymbol{v}_2 \\ &= (-\frac{2}{7}s - \frac{3}{7}t)\boldsymbol{v}_1 + (-\frac{5}{7}s - \frac{4}{7}t)\boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

är en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$. Därmed har vi visat att hela U ligger i V.

2. $V \subset U$: Detta visas på samma sätt som 1. ovan.
Eftersom nu U och V ligger i varandra, sä följer att $U = V$.

13.1. Mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ är en ON-följd, ty

$$(\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}_3) = (\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}_3) = 0$$

och

$$\|\boldsymbol{v}_1\| = \|\boldsymbol{v}_2\| = \|\boldsymbol{v}_3\| = 1.$$

Visa detta!
Vidare är underrummet $W = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ mängden av alla linjär kombinationer. En vektor $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ tillhör W om

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1/2 & 1/2 & 1/2 & x_1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & x_2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & x_3 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & x_4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 1 & 2x_1 \\ 1 & 1 & -1 & 2x_2 \\ 1 & -1 & -1 & 2x_3 \\ 1 & -1 & 1 & 2x_4 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2x_1 \\ 0 & 0 & -2 & 2x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ 0 & -2 & 0 & 2x_4 - 2x_1 \end{array}\right).$$

Systemet är lösbart endast om $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$, dvs

$$W = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{E}^4 : \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Som $\boldsymbol{v}_4$ tar vi enklast en normerad normal, dvs $\boldsymbol{v}_4 = \dfrac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^t$, ty den är ortogonal mot W. Alltså är $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ en ON-bas för $\mathbf{E}^4$. Koordinaterna för $\boldsymbol{u}$ ges av

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 + \lambda_4\boldsymbol{v}_4$$

eller eftersom det är en ON-bas:

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}_3)\boldsymbol{v}_3 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}_4)\boldsymbol{v}_4.$$

13.2. Av definitionen av linjärt beroende följer att $\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$. Visa detta!
Alltså är $W = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ med $\dim W = 2$. Låt $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^t$.
G-S process ger

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)^t.$$

Normera, så att $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{f}_2\|}\boldsymbol{f}_2 = \dfrac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)^t$. För att fylla ut till ON-bas söker vi $\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ sådan att

$$\begin{cases} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \\ \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

vilket har lösningen

$$\boldsymbol{w} = s(1, 0, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1).$$

Fyll ut med ortogonala $\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)^t$ och $\boldsymbol{e}_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^t$. Vill man ha samma struktur som $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ får man välja $s = t = 1$ som ger $\boldsymbol{w} = (1,1,1,1)^t$ och $s = -t = 1$ som ger $\boldsymbol{w} = (1,-1,1,-1)^t$ också ortogonala. Vidare gäller

$$\boldsymbol{u} = \underbrace{(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2}_{\boldsymbol{u}_{\|W}} + \underbrace{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{e}_4}_{\boldsymbol{u}_{\|W^\perp}},$$

där

$$\boldsymbol{u}_{\|W} = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = (-1,0,1,0)^t$$

och

$$\boldsymbol{u}_{\|W^\perp} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\|W} = (0,1,0,1)^t.$$

Man kan om man vill arbeta med enklare siffror än vad som finns i $\boldsymbol{v}_1$, och $\boldsymbol{v}_2$ låta t.ex. $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = (0,1,0,1)^t$ och $\boldsymbol{f}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = (1,0,1,0)^t$. Dessa är dessutom ortogonala, ty $(\boldsymbol{f}_1|\boldsymbol{f}_2) = 0$.

13.3. Visa att $\dim W = [\boldsymbol{v}_1 = (1,2,1,-1)^t, \boldsymbol{v}_2 = (0,1,0,1)^t] = 2$. Bestäm en ON-bas i W mha G-S process: låt $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{7}}(1,2,1,-1)^t$; vidare låt

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{7}(5,-4,5,2)^t.$$

Normera, så att $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{f}_2\|}\boldsymbol{f}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{70}}(5,-4,5,2)^t$. Vektorn

$$\boldsymbol{u} = \underbrace{(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2}_{\boldsymbol{u}_{\|W}} + \underbrace{(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{e}_4}_{\boldsymbol{u}_{\|W^\perp}},$$

där

$$\boldsymbol{u}_{\|W} = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{5}(5,2,5,-1)^t.$$

och

$$\boldsymbol{u}_{\|W^\perp} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\|W} = \frac{1}{5}(0,3,0,6).$$

13.4. Visa att $\dim W = [\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,-1)^t, \boldsymbol{v}_2 = (-1,1,3,-1)^t, \boldsymbol{v}_3 = (1,0,-1,0)^t] = 2$, ty det är linjärt beroende: $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ och onödiga vektorer skall strykas. $W = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$. Bestäm nu en ON-bas i W mha G-S process så att

$$W = \left[\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,-1)^t, \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0)^t\right].$$

Närmaste vektorn till $\boldsymbol{u}$ är $\boldsymbol{u}_{\|W}$ som ges av

$$\boldsymbol{u}_{\|W} = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2.$$

Observera att

$$\boldsymbol{u}_{\perp W} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\|W},$$

13.5. Visa att $\dim W = 2$, där $W = [\boldsymbol{v}_1 = (1,2,0,0,0)^t, \boldsymbol{v}_2 = (1,0,3,0,0)^t$. Ortogonala komplementet $W^\perp$ med $\dim W^\perp = \dim \mathbf{E}^5 - 2 = 3$ är mängden av alla vektorer $\boldsymbol{w}$ ortogonala mot W. Bestäm alltså alla vektorer $\boldsymbol{w}$ sådana att $(\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}_1) = 0$ och $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}_2) = 0$. Om $\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t \in \mathbf{E}^5$, så är

$$\begin{cases} (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}_1) & = & x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}_2) & = & x_1 + 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Sätt $x_1 = 6t$. Då är $x_2 = -3t$ och $x_3 = -2t$. Sätt vidare $x_4 = s$ och $x_5 = r$. Då är

$$\boldsymbol{w} = r(0,0,0,0,1)^t + s(0,0,0,1,0)^t + t(6,-3,-2,0,0)^t.$$

Alltså är $W^\perp = [(0,0,0,0,1)^t, (0,0,0,1,0)^t, (6,-3,-2,0,0)^t]$. Dessa är ortogonala; kvar att normera.

13.6. Inlämningsuppgift.

13.7. Redovisningsuppgift.

13.18. a) Se Exempel 12.30 samt övningarna ovan.

b) Se Exempel 12.29 samt övningarna ovan.

13.19. Samma tipset i övningen, dvs Definition 6.36.

15.1. Se Exempel 12.27 samt övningarna ovan.

15.2. Vektorn $\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in W \subset \mathbf{E}^4$ om $\boldsymbol{w}$:s koordinater satisfierar båda ekvationenrna i W, dvs

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 - x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Sätts $x_4 = t$ får vi att $x_2 = t$ och $x_3 = s$ visar att $x_1 = -s + t$.
Alltså är $\boldsymbol{w} = s(-1,0,1,0)^t + t(1,0,0,1)^t$ och därmed $W = [(-1,0,1,0)^t, t(1,0,0,1)^t]$.
Se vidare 12.27 samt övningarna ovan.

15.3. Se Exempel 14.7.

Sätter vi in punkterna i linjens ekvation $y = kx + m$ får vi ekvationsystemet:

$$\begin{cases} -k & + & m & = & -3 \\ k & + & m & = & -2 \\ 3k & + & m & = & 5 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{dvs} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Lös normalekvationen $A^t A\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 11 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Lösningen är $k = 2$ och $m = -2$. Linjen som ansluter bäst till punkterna är alltså $y = 2x - 2$.

15.4. Se Exempel 14.7 samt övningen ovan.

15.6. Redovisningsuppgift.

17.1. Se Exempel 16.7.

17.12. a) Av räknelagarna för skalärprodukt följer att F är linjär:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2) &= ((\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)|\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = ((\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{a}))\boldsymbol{a} \\ &= (\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{a}))\boldsymbol{a} = F(\boldsymbol{u}_1)+F(\boldsymbol{u}_2) \end{aligned}$$

och

$$F(\lambda\boldsymbol{u}) = (\lambda\boldsymbol{u}|\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = \lambda F(\boldsymbol{u}).$$

b) Se Exempel 16.10.

c) F är ej linjär:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2) &= ((\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)|\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2) = ((\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)|\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_1 + ((\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)|\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_2 \\ &= \underline{(\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_1} + (\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_2 + \underline{\underline{(\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_2}} \\ &= \underline{F(\boldsymbol{u}_1)} + \underline{\underline{F(\boldsymbol{u}_2)}} + (\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_2 \neq F(\boldsymbol{u}_1)+F(\boldsymbol{u}_2) \end{aligned}$$

17.3. Se Exempel 16.16.

17.4. Se Exempel 16.12.

17.5. Se Exempel 16.12.

17.6. Redovisningsuppgift.

17.7. Avbildningen F som har matrisen A_5 är en vridspegling, ty

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom A_5 är symmetrisk med $\det A_5 = -1$ följer av Anmärkning 16.61 att F är en spegling i ett plan. Då planets riktningsvektorer $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}X_1$ och $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}X_2$ speglas på sig själva, bestäms dessa genom att lösa $F(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_j \Leftrightarrow A_5X_j = X_j, \qquad j = 1, 2.$
Planets riktningsvektorer är $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1$ resp. $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2 + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_3$.

17.8. Inlämningsuppgift.

17.9. F:s matris $A = (F(\boldsymbol{e}_1)\ F(\boldsymbol{e}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ger att F^2:s matris är $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
En avbildning G som uppfyller $GF = FG = I$, där I är identiten är inversen till F med matrisen $A^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

17.10. Se Exempel 16.42.
Nollrummet $N(F)$ består av alla vektorer $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X$ som under F avbildas på nollvektorn, dvs

$$F(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{e}}AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow AX = \mathbf{0}.$$

Löser vi ekvationssystemet får vi

$$AX=\mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow X = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser alltså att $N(F)$ spänns upp av endast vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}(1,1,2)^t$. Detta betyder att $\dim N(F) = 1$, dvs en rät linje genom origo.
Enligt dimensionssatsen är $\dim V(F) = 2$ och underummet $V(F) = [F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), F(\boldsymbol{e}_3)] = [F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2)]$ är ett plan genom origo. En normal till detta plan är t.ex.

$$F(\boldsymbol{e}_1)\times F(\boldsymbol{e}_2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Geometriskt är underrummet $V(F) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 : \ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Eftersom $(1,1,2)^t \notin V(F)$ så har $N(F)$ och $V(F)$ inga gemensamma element. Vidare gäller att $F(\underline{\boldsymbol{e}}(3,2,4)^t) = \underline{\boldsymbol{e}}(3,2,4)^t$ och $F(\underline{\boldsymbol{e}}(1,0,2)^t) = \underline{\boldsymbol{e}}(1,0,2)^t$, dvs avbildas på sig själva.

17.11. $N(F) = [(1,1,1)^t]$, $V(F) = [(2,1,1)^t, (1,0,1)^t]) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Enligt 17.3., så är $N(G) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ och $V(F) = [(1,1,1)^t]$.

$$\boldsymbol{u} = (x_1,x_2,x_3)^t \in V(F)\cap N(G) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

17.12. F^2 har matrisen A^2.

17.13. Se Exempel 16.4.

17.14. Det gäller att

$$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = X^t\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = (TY)^t\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = Y^tT^t\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = (y_1\ y_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 9y_1 + 17y_2.$$

17.20. Se Exempel 16.57. Byt till en ny höger ON-bas $\underline{\boldsymbol{f}}$, där $\boldsymbol{f} = \underline{\boldsymbol{e}}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ så att $F(\boldsymbol{f}_1) = \boldsymbol{f}_1 = \underline{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Välj t.ex., $\boldsymbol{f}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och sedan $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, så att

$$\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$F(\boldsymbol{f}_2) = \cos\theta \boldsymbol{f}_2 + \sin\theta \boldsymbol{f}_3 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{f}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{f}_3 = \underline{\boldsymbol{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$F(\boldsymbol{f}_3) = -\sin\theta \boldsymbol{f}_2 + \cos\theta \boldsymbol{f}_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{f}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{f}_3 = \underline{\boldsymbol{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

så att

$$A_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Avbildningsmatrisen ges av

$$\begin{aligned} A_{\boldsymbol{e}} &= TA_{\boldsymbol{f}}T^t = 2\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

17.21. Se Exempel 16.6.

17.22. Se Exempel 16.11.

17.23. Se Exempel 16.7.

17.25. (a) Linjensriktningsvektor är $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1$ och normal $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_2$. Alternativen är många: Projektionsformeln, Basbyte. Kanske enklast $F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ och $F(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}$.
(b) Utnyttja linjensriktningsvektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ och normal $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$.
(c) Se (b).
(d) Utnyttja linjensriktningsvektor $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$ och normal $\boldsymbol{n} = -3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$. T.ex., så är $F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ och $F(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{0}$.
(e) Se Exempel 16.20.
(d) Se Exempel 16.20. Negativ led $\theta = -\pi/6$.

17.27. Se Exempel 16.11.

17.28. $W = \left[\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^t, \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^t\right]$, $\dim W = 2$.
Vi söker alltså $P_W(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\parallel W}$.

$$P_W(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2.$$

Låt $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$. Eftersom

$$(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och

$$(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

så är

$$P_W(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Alltså ges matrisen för ortogonalprojektion på W av matrisen ovan.

17.30. För $p_0(x) = 1$ gäller att $p_0(x+2) = 1$ samt $p_0'(x) = 0$ och $p_0'(x+1) = 0$.
För $p_1(x) = x$ gäller att $p_1(x+2) = x+2$ samt $p_1'(x) = 1$ och $p_1'(x+1) = 1$.
För $p_2(x) = x^2$ gäller att $p_2(x+2) = (x+2)^2$ samt $p_2'(x) = 2x$ och $p_2'(x+1) = 2(x+1)$.
Bilden av baspolynomen är därmed

$$F(P_0(x)) = x \cdot 0 + 1 = 1 = \underline{\boldsymbol{p}}(1,0,0)^t,$$

$$F(P_1(x)) = x \cdot 1 + x + 2 = 2x + 2 = \underline{\boldsymbol{p}}(2,2,0)^t,$$

$$F(P_2(x)) = x \cdot (2x+2) + (x+2)^2 = 3x^2 + 6x + 4 = \underline{\boldsymbol{p}}(4,6,3)^t.$$

F:s matris i basen $\underline{\boldsymbol{p}} = \{p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2\}$ ges således av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

17.36. Bassambandet $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$ och koordinatsambandet $X = TY$, där $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Vidare är

$$A_{\boldsymbol{f}} = T^{-1}A_{\boldsymbol{e}}T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

17.37. F:s matris i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ ges av $A_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Bassambandet $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$, där $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Sambandet mellan avbildningsmatriser ger $A_{\boldsymbol{f}} = T^{-1}A_{\boldsymbol{e}}T$.

17.40. Om A och B är avbildningsmatriser för samma avbildning givna i 2 olika baser med transformationsmatris T, så gäller att $B = T^{-1}AT$. Enligt determinantlagarna gäller i så fall

$$\det B = \det(T^{-1})(\det A)(\det T) = \det A.$$

Eftersom $\det A = 2 \neq 4 = \det B$ kan dessa inte representera samma avbildning.

22.1. Se tipset i svaret för övningen.

22.2. Undersök för vilka vektorer $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}\,X$ det finns ett tillhärande egenvärde λ så att

$$F(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v} \Leftrightarrow AX = \lambda X.$$

22.3. Sekularekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ ger egenvärdena $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ och $\lambda_3 = 1$. Tillhörande egenvektorer ges av det homogena ekvationssystemet $(A - \lambda E)X = \mathbf{0}$. Detta ger egenrummen $E_{\lambda=-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 : \ x_2 + x_3 = 0\} = [(1,0,0)^t, (0,1,-1)^t]$ resp. $E_{\lambda=1} = [(1,1,0)^t]$.

22.4. Eftersom F är symmetrisk så spektralsatsen att F har en ON-bas av egenvektorer. Utnyttja symmetrin i sekularekvationen

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \{k3 - k1\} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2+\lambda \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Addera nu R1 till R3 får vi

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2+\lambda \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 4-\lambda & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(2+\lambda)(8-(2-\lambda)(4-\lambda)) = -(2+\lambda)\lambda(6-\lambda).$$

Egenvektorerna fås genom att lösa homogena ekvationssystemet $(A - \lambda E)X = \mathbf{0}$.

22.5. Se tipset i svaret för övningen.

22.6. Se Exempel 19.9.

22.7. Se tipset i svaret.

22.8. $Q = X^tAX$, där $A = TDT^t$ har egenvärden $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, och $\lambda_2 = \dfrac{5}{2}$ med tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\,t\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ resp. $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\,t\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.
I kanonisk bas är $Q = \dfrac{1}{2}y_1^2 + \dfrac{5}{2}y_1^2$.

22.9. $Q = X^tAX$, där $A = TDT^t$ har egenvärden $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = -1$. Tillhörande egenrum är $E_{\lambda=2} = [(1,1,0)^t, (1,0,1)^t] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ resp. $E_{\lambda=-1} = [(1,-1,-1)^t]$. $Q = 2y_1^2 + 2y_1^2 - y_3^2$ i kanonisk bas. $Q_{\text{min}} = -1$ i $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = \pm 1$. Bestäm $X = TY$. $Q_{\text{max}} = 2$ i $y_1^2 + y_2^2 = 1$, $y_3 = 0$. Bestäm $X = TY$ som är punkter på en ellips. Enklare är att skriva planet $y_3 = 0$ i gamla koordinaterna

$$0 = y_3 = (y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Y^t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X^tT\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 - x_3.$$

Alltås fås ellipsen som skärningen mellan planet $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ och enhetssfären.

22.10. Se tipset i svaret. Det gäller att

$$d^2 = y_1^2 + y_2^2 = \left\{ y_1^2 = \frac{y_2^2+9}{4} \right\} = \frac{y_2^2+9}{4} + y_1^2 = \frac{5}{4}y_2^2 + \frac{9}{4} \geq \frac{9}{4}.$$

Alltså $d_{\min} = \frac{3}{2}$ i $y_2 = 0$, $y_1 = \pm\frac{3}{2}$. På samma sätt visar

$$d^2 = y_1^2 + y_2^2 = \{y_2^2 = 4y_1^2 + 9\} = 5y_1^2 + 9,$$

att d saknar ett största värde. Rimligt då Q är en hyperbel.

22.11. I kanonisk bas av ON-egenvektorer $\boldsymbol{f}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ med tillhörande egenvärden $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = 10$ ges kurvan av $5y_1^2 + 20y_2^2 = 20$. Ellips!

22.12. Ytan $Q = 1 \Leftrightarrow X^tAX = 1$, där $A = TDT^t$ har egenvärden $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 4$. Tillhörande egenrum är $E_{\lambda=0} = [(1, 0, -\sqrt{3})^t]$, $E_{\lambda=1} = [(0, 1, 0)^t]$, $E_{\lambda=4} = [(\sqrt{3}, 0, 1)^t]$. I kanonisk bas ser vi att ytan är $Q = y_2^2 + 4y_3^2 = 1$, dvs en sned ellipsformad cylinder med symmtriaxlen längs y_1-axeln. Om d är avståndet från ytan till origo så saknar d ett största värde, ty ytan är inte begränsad. Vidare gäller att

$$d^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + \frac{1 - y_2^2}{4} = \frac{1}{4} + y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Alltså är $d \geq \frac{1}{2}$ och att $d_{\min} = \frac{1}{2}$ i $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = \pm\frac{1}{2}$. Bestäm $X = TY$.

22.13. Söker gemensamma punkter mellan ytan $Q = 9$ och enhetssfären.
Ytan $Q = 9 \Leftrightarrow X^tAX = 9$, där A har egenvärden $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$. Tillhörande egenrum är $E_{\lambda=0} = [(2, 1, -2)^t]$, $E_{\lambda=9} = [(1, 2, 2)^t, (2, -2, 1)^t]$.
I kanonisk bas är $Q = 9y_2^2 + 9y_3^2 = 9$ och S är $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$. Gemensamma punkter sökes bland

$$\begin{cases} 9y_2^2 + 9y_3^2 &= 9 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= 1 \end{cases}$$

som har lösningen $y_1 = 0$, $y_2^2 + y_3^2 = 1$ som i gamla basen har koordinaterna

$$0 = y_1 = (y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Y^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X^tT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x_1 + x_2 - 2x_3.$$

Alltså ges de gemensamma punkterna mellan ytorna av skärningen mellan planet $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ och enhetssfären.

22.16. $Y' = AY$, där $A = TDT^{-1}$ har egenvärdena $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 2$ med tillhörande egenrum $E_{\lambda=-2} = [(1, -3)^t]$, $E_{\lambda=2} = [(1, 1)^t]$.

22.17. Matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 6$. Tillhörande egenrum $E_{\lambda=-2} = [(-4, 1)^t]$, $E_{\lambda=2} = [(3, 1)^t]$, så att $A = TDT^{-1}$. Systemet kan då skrivas

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = TD^nT^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Då är

$$\frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1/6)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

då $n \to \infty$.

22.18. Systemet kan skrivas $A = TDT^{-1}$, där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ och $\lambda_3 = 2$. Tillhörande egenrum $E_{\lambda=-1} = [(1,-1,0)^t, (1,0,-1)^t]$, $E_{\lambda=2} = [(1,1,1)^t]$.

22.20. Om A är diagonaliserbar med så positiva så är

$$A = TDT^{-1} = TD^{1/2}D^{1/2}T^{-1} = \underbrace{TD^{1/2}}_{=B}\underbrace{T^{-1}TD^{1/2}T^{-1}}_{=B} = B^2.$$

22.21. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ är inte diagonaliserbar, ty till egenvärdena $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ hör endast egenrummet $E_{\lambda=1} = [(1,1)^t]$. Eftersom

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A^5 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix},$$

så formulerar vi påståndet att

$$A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{pmatrix}.$$

Vi visar med induktioon att detta påstånde är sant. För $n = 1$ är det trivialt. Antag nu att påståndet är sant för n. Då gäller att

$$A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & n-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+2 & -n-1 \\ n+1 & -n \end{pmatrix}.$$

Därmed följer påståendet.

22.22. Sätt $b_n = a_{n+1}$ och låt $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ med egenvärdena $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 1$ och tillhörande egenrum $E_{\lambda=-1/2} = [(-2,1)^t]$ och $E_{\lambda=1} = [(1,1)^t]$. Då kan ekvationen skrivas som systemet

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n+1}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = TD^{n+1}T^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

då $n \to \infty$. Detta ger att $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

22.25. Avbildningen har matrisen D i basen av egenvektorer $\boldsymbol{f}$. Utnyttja matrissambandet $A = TDT^{-1}$, där $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ och $T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

22.41. Se Exempel 10.10 för detaljer.

(a) F har egenvärdena $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Tillhörande egenrum $E_{\lambda=0} = [(1,1,1)^t]$, $E_{\lambda=1} = [(1,-1,0)^t, (1,0,-1)^t]$. F är symmetrisk med determinant 0.

(b) F har egenvärdena $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Tillhörande egenrum $E_{\lambda=0} = [(1,1,1)^t]$, $E_{\lambda=1} = [(1,-1,0)^t, (1,0,-1)^t]$. F är ej symmetrisk och därmed som tillsynes är egenvektorerna ej ortogonala. Vidare är determinanten 0 samt $\dim N(F) = 1$ där $N(F) = [(1,1,1)^t]$ och $\dim V(F) = 2$.
F är en **sned** projektion på planet $E_{\lambda=1}$ parallellt med linjen $t(1,1,1)^t$.

(c) F har ortogonal matris med determinant 1, dvs F är en vridning.

(d) F har egenvärdena $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Tillhörande egenrum $E_{\lambda=1} = [(-1,2,1)^t]$, $E_{\lambda=0} = [(2,-1,0)^t, (3,0,1)^t]$. F är ej symmetrisk och därmed som tillsynes är egenvektorerna ej ortogonala.
Vidare är determinanten 0 samt $\dim N(F) = 2$ där $N(F) = [(2,-1,0)^t, (3,0,1)^t]$ och $\dim V(F) = [(-1,2,1)^t]$.
F är en **sned** projektion på linjen $t(-1,2,1)^t$ parallellt med $E_{\lambda=0}$.

22.42. (a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alltså är $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

22.43. (a) Vi har $(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$.

22.46. Vänstra ledet i sambandet kan skrivas X^tAX, där $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda = 2 - \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ och tillhörande egenrum $E_{\lambda_1} = [(1, \sqrt{2} - 1)^t]$ resp. $E_{\lambda_2} = [(1, -\sqrt{2} - 1)^t]$. I kanonisk bas ges ellipsen av $(2 - \sqrt{2})y_1^2 + (2 + \sqrt{2})^2 y_2^2 = 1$. Vad är a och b i ekvationen?