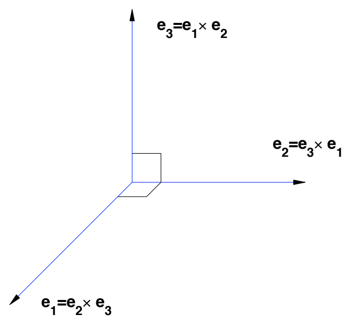
4.2. Vektorprodukt i koordinater

Nästa sats visar hur vi kan räkna med vektorprodukt i en ON-bas. Satsen följer av Definition 4.3 samt räknelagrna i Sats 4.4.

Sats 4.5. Låt $\underline{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ vara en ON-bas i ett positivt orienterat högersystem. Då gäller att

1. $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$
2. $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$
3. $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$
4. $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$.



Exempel 4.6. Låt $\boldsymbol{u} = \underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \underline{e}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ vara givna i ON-basen $\underline{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Bestäm vektorprodukten $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

Lösning: Eftersom $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3$ och $\boldsymbol{v} = x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + z_2\boldsymbol{e}_3$ gäller att

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3) \times (x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + z_2\boldsymbol{e}_3) \\
&= x_1x_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1)}_{=0} + x_1y_2(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) + x_1z_2(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3) \\
&\quad + y_1x_2(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1) + y_1y_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2)}_{=0} + y_1z_2(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) \\
&\quad + z_1x_2(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1) + z_1y_2(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2) + z_1z_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3)}_{=0}.
\end{aligned}$$

Enligt Sats 4.5 försvinner första, femte och nionde termen ovan, så att

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= x_1y_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)}_{=\boldsymbol{e}_3} + x_1z_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3)}_{=-\boldsymbol{e}_2} + y_1x_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1)}_{=-\boldsymbol{e}_3} \\
&\quad + y_1z_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)}_{=\boldsymbol{e}_1} + z_1x_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1)}_{=\boldsymbol{e}_2} + z_1y_2\underbrace{(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2)}_{=-\boldsymbol{e}_1}.
\end{aligned}$$

Utnyttjar vi Sats 4.5 tillsammans med räknelagarna i Sats 4.4 får vi att

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = x_1y_2\boldsymbol{e}_3 - x_1z_2\boldsymbol{e}_2 - y_1x_2\boldsymbol{e}_3 + y_1z_2\boldsymbol{e}_1 + z_1x_2\boldsymbol{e}_2 - z_1y_2\boldsymbol{e}_1.$$

Om vi samlar de termer som hör ihop får vi

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\boldsymbol{e}_1 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\boldsymbol{e}_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\boldsymbol{e}_3. \tag{4.2}$$

Vi ser att uttrycket (4.2) som ger kryssprodukten mellan två vektorer är ganska komplicerat. Att dessutom försöka komma ihåg det är inte det lättaste. Därför är det lämpligt att ta fram ett schema som gör det enklare för oss att beräkna en vektorprodukt på. Ett sätt är att använda sig av följande beteckning:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \text{(korsmultiplikation!)}.$$

Med denna beteckning kan paranteserna i (4.2) skrivas:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 z_2 - z_1 y_2, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_1 z_2 - z_1 x_2, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Därmed kan vektorprudukten i (4.2) beräknas enligt:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3. \tag{4.3}$$

Slutligen behöver vi veta vilka element som skall stå i respektive schema. Detta löser vi genom att skriva om vektorprodukten (4.3) med hjälp av ett utvidgat schema där även basvektorerna återfinns, dvs

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

□

Låt oss sammanfatta hur vi räknar vektorprodukt $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Vi sätter upp 3×3 schema med basvektorerna på 1:a raden, $\boldsymbol{u}$ på 2:a raden och $\boldsymbol{v}$ på 3:e raden enligt

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Vi går längs 1:a raden i schemat och tar ner basvektorerna en i taget, byter tecken på 2:a termen och summerar:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} \star & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \star & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \star \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Nu stryker vi ur schemat den rad och den kolonn som $\boldsymbol{e}$:na stod på (dvs $\star$ står på):

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3.$$

Korsmultiplikationen på 2×2 schemat ger slutligen att

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\boldsymbol{e}_1 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\boldsymbol{e}_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\boldsymbol{e}_3.$$

Exempel 4.7. Beräkna $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ om $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. ($\underline{\boldsymbol{e}}$ ON-bas).

Lösning: Vi beräknar $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ genom att sätta upp ett 3×3 schema med basvektorerna på 1:a raden, $\boldsymbol{u}$ på 2:a raden och $\boldsymbol{v}$ på 3:e raden enligt

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Vi går längs 1:a raden i schemat och tar ner basvektorerna en i taget, byter tecken på 2:a termen och summerar:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} \star & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \star & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \star \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Vi stryker ur schemat den rad och den kolonn som $\boldsymbol{e}$:na stod på (dvs $\star$ står på) och får

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ett 2×2 schema räknar vi ut med korsmultiplikation, så att

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1(2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) - \boldsymbol{e}_2(1 \cdot 6 - 4 \cdot 3) + \boldsymbol{e}_3(1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = -3\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3,$$

eller på vektorform

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

En kontroll visar att $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ är ortogonal mot både $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. $\square$

Exempel 4.8. I Exempel 3.10 i kompendiet *Vektorer, linjer och plan* använde vi skalärprodukten till att bestämma alla vektorer $\boldsymbol{u}$ som är ortogonala mot $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestäm alla $\boldsymbol{u}$ genom att använda vektorprodukten. (ON-bas).

Lösning: Om vektorerna är givna i en ON-bas $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, så är

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Alltså är $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. En kontroll visar att $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}_2$. □

Exempel 4.9. Låt $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ vara en positiv orienterad ON-bas i rummet. Bestäm en ny positiv orienterad ON-bas $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$, sådan att första basvektorn $\boldsymbol{f}_1$ är parallell med vektorn $\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi ska tydligen bestämma ett reellt tal λ, så att

$$\boldsymbol{f}_1 = \lambda(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) = \lambda\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad |\boldsymbol{f}_1| = 1.$$

Eftersom vektorn $\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ har längden $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$, så väljer vi $\lambda = 1/3$ och får därmed att $\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Nu väljer vi den andra basvektorn $\boldsymbol{f}_2$ sådan att $\boldsymbol{f}_1 \perp \boldsymbol{f}_2$ och $|\boldsymbol{f}_2| = 1$. Här finns många vektorer att välja bland. Låt t.ex. $\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. För att mängden $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ skall bli positiv orienterad ON-bas väljer vi sista basvektorn till

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

□

Exempel 4.10. Låt vektorerna $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ vara givna i ON-basen $\underline{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Beräkna skalärprodukten $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

Lösning: Enligt Exempel 4.2, så följer att

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3.$$

Skalärprodukten ges därmed av

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 \right) \\ &= \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_1 \end{aligned}$$

Vi skriver detta som ett utvidgat schema

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{4.5}$$

Schemat i (4.5) är vad vi kallar för **determinanten** för tillhörande matris

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Vi återkommer till determinantbegreppet i Kapitel 8. □

Exempel 4.11. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Lösning: Vi beräknar determinantens värde genom att följa de steg som ledde till (4.5):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} \star & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \star & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & \star \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\ &= \{\text{stryk den rad och kolonn som } \star \text{ står på}\} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) = 0. \end{aligned}$$

□