17. Övningar

17.1. Låt F och G vara avbildningar på rummet, som i basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ ges av

$$F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \boldsymbol{e}Y = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_3 \end{pmatrix}, \qquad G(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Undersök om F är linjär. Skriv avbildningen som en matrisprodukt, $Y = AX$, där A inte beror på X. Bestäm också basvektorernas bilder och visa hur dessa kan avläsas ur A. Undersök om G är linjär.

17.2. Låt $\boldsymbol{a}$ vara en fix vektor i rummet. Vilka av följande avbildningar på rummet är linjära?

a) $F(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ b) $F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}$ c) $F(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}$.

17.3. Låt G vara ortogonal projektion på normalen till planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ i $\mathbf{E}^3$. Ange G:s matris i standardbasen.

17.4. Låt F vara ortogonal projektion på planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ i $\mathbf{E}^3$. Ange F:s matris i standardbasen.

17.5. Låt F vara spegling i planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ i $\mathbf{E}^3$. Ange F:s matris i standardbasen.

17.6. Låt $\underline{\boldsymbol{e}}$ vara en bas för V, där $\dim V = 2$. Ange matrisen för den linjära avbildning, F, som byter plats på $\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$ och $2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$. Bestäm sedan vektorer $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ sådan att $F(\boldsymbol{f}_1) = \boldsymbol{f}_1$ och $F(\boldsymbol{f}_2) = -\boldsymbol{f}_2$. Välj $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ som bas. Ange F:s matris i denna bas.

17.7. Givet en höger ON-bas i rummet. Följande matriser definierar linjära avbildningar i rummet. Beskriv geometriskt vad dessa gör.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

17.8. Låt $\underline{\boldsymbol{e}}$ vara en ON-bas i rummet och låt

$$F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a},$$

där $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$.

a. Bestäm F:s matris i denna bas.

b. Vektorerna

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}\boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3), \qquad \boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3).$$

utgör en ny bas. Bestäm F:s matris i den nya basen $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$.

17.9. Låt $\underline{\boldsymbol{e}}$ vara en bas för V, där $\dim V = 2$. Antag att $F : V \mapsto V$ är en linjär avbildning som uppfyller

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{e}_1) &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \\ F(\boldsymbol{e}_2) &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \end{cases}$$

Bestäm matrisen för F^2 i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$.

17.10. Låt F vara en avbildning på rummet som i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm $N(F)$ och $V(F)$. Visa att $N(F) \cap V(F) = \mathbf{0}$. Hur avbildas vektorerna i $V(F)$?

17.11. Avbildningen F på rummet ges i ON-basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

och G är ortogonal projektion på linjen $[\underline{\boldsymbol{e}}(1,1,1)^t]$. Bestäm $V(F) \cap N(G)$.

17.12. Avbildningen F på rummet ges i ON-basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm baser för $N(F)$, $V(F)$, $N(F) \cap V(F)$, $N(F^2)$ och $V(F^2)$.

17.13. Givet två baser $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ och $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ i V. Ange följande bassamband

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

på matrisform. Ange också det omvända bassambandet samt koordinatsambanden.

17.14. Givet en bas $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ i planet. Vi inför en ny bas $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ genom att sätta $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$, där $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. En linje har ekvationen $x_1 + 7x_2 = 0$ i den gamla basen. Vad är dess ekvation i den nya basen?

17.15. Givet en ON-bas $\underline{\boldsymbol{e}}$ i $\mathbf{E}^3$. I denna bas ges avbildningen F av matrisen

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Inför en ny bas bestående av vektorer ur $N(F)$ och $V(F)$. Ange matrisen för F i den nya basen. Tolka F geometriskt.

17.16. Låt $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ vara en ON-bas i planet. Inför en ny bas $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ genom

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) \\ \boldsymbol{f}_2 &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) \end{cases}$$

Låt F vara ortogonal projektion på linjen $x_1 + 2x_2 = 0$. Ange F:s matris i basen $\underline{\boldsymbol{f}}$ och beräkna med hjälp av bassambanden avbildnings matris i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$.

17.17. Låt $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ vara en ON-bas i planet. Inför en ny bas $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ genom

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) \\ \boldsymbol{f}_2 &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) \end{cases}$$

Låt F vara spegling i linjen $x_1 + 2x_2 = 0$. Ange F:s matris i basen $\underline{\boldsymbol{f}}$ och beräkna med hjälp av bassambanden avbildningsmatrisen i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$.

17.18. Låt $\underline{\boldsymbol{e}}$ vara en ON-bas i rummet och låt F vara ortogonal projektion på planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Välj en lämplig ny bas $\underline{\boldsymbol{f}}$ och ange F:s matris i denna. Beräkna med hjälp av bassambanden matrisen i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$.

17.19. Låt $\underline{\boldsymbol{e}}$ vara en ON-bas i rummet. Avbildningen F är spegling i planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Beräkna avbildningens matris i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$.

17.20. Låt $\underline{\boldsymbol{e}}$ vara en höger-ON-bas i rummet och F rotation $2\pi/3$ i positiv led runt $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. Beräkna avbildningens matris i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$.

17.21. Låt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ vara en bas i $\mathbf{R}^2$. Avgör vilka av följande tre avbildningar $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, som är sådan att

a. $F_1(\boldsymbol{e}_1 x_1 + \boldsymbol{e}_2 x_2) = x_2^2 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2$

b. $F_2(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

c. $F_3(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$

17.22. Låt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ vara en bas för $\mathbf{R}^2$. Bestäm matrisen för den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, sådan att

$$F(3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2) = 5\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2, \qquad F(2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2) = 7\boldsymbol{e}_1 + 8\boldsymbol{e}_2.$$

17.23. Den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ har i basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm bilden av $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ under F. Ange urbilden till $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ under F.

17.24. Bestäm matrisen till den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som i basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ definieras genom

$$F(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \qquad F(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \qquad F(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3.$$

17.25. Låt $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ vara en ON-bas i planet. Bestäm matrisen i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ för följande linjära avbildningar:

a. spegling i x_1-axeln.
b. ortogonal projektion på linjen $x_1 + x_2 = 0$.
c. spegling i linjen $x_1 + x_2 = 0$.
d. ortogonal projektion på linjen $4x_1 + 3x_2 = 0$.
e. rotation ett kvarts varv i positiv led (dvs $\boldsymbol{e}_1$ till $\boldsymbol{e}_2$).
f. rotation vinkeln $\pi/6$ i negatitv led (dvs $\boldsymbol{e}_2$ till $\boldsymbol{e}_1$).

17.26. Bestäm matrisen till den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som i basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ avbildar de tre vektorerna $(1, 2, 1)^t$, $(1, 1, -1)^t$ och $(-1, 0, 1)^t$ på resp. $(1, 3, 1)^t$, $(3, 1, 2)^t$ och $(5, -1, 3)^t$. Bestäm också värderummet $V(F)$.

17.27. Betrakta avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ ges av

$$F(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, 4x_1 + x_2 + 6x_3).$$

a. Visa att F är linjär.
b. Bestäm F^{-1}:s matris i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$.

17.28. Låt $W = [(1, 1, 1, 1)^t, (1, -1, 1, -1)^t]$ i $\mathbf{E}^4$. Bestäm matrisen för den ortogonala projektionen F på W, dvs projektion på W parallellt med $W^{\perp}$.

17.29. Låt $\underline{\boldsymbol{p}} = \{1, x, x^2, x^3\}$ vara en bas i $\mathcal{P}_3$ och betrakta avbildningen

$$F(p(x)) = \frac{d^2}{dx}p(x) - 2x\frac{d}{dx}p(x).$$

a. Visa att F är en linjär avbildning på $\mathcal{P}_3$.

b. Bestäm matrisen för F på $\mathcal{P}_3$ i basen $\underline{\boldsymbol{p}}$.

17.30. I det linjära rummet $\mathcal{P}_2$ definieras en linjär avbildning F genom

$$F(p(x)) = xp'(x+1) + p(x+2).$$

Bestäm F:s matris relativt basen $\underline{\boldsymbol{p}} = \{1, x, x^2\}$

17.31. Låt M_{22} vara vektorrummet av alla 2×2 matriser. Definiera avbildningen F genom

$$F(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A + A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Visa att F är en linjär avbildning på M_{22}.

b. Bestäm $\dim N(F)$ samt en bas i $N(F)$.

17.32. Konstruera an matris, som representerar en linjär avbildning $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ med

$$N(F) = [(1,1,1)^t]$$

och

$$V(F) = [(1,0,0)^t, (1,1,0)^t].$$

17.33. Den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ges i en given bas av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & a+3 & a \\ a & 3a+1 & 1 \\ 2 & 4a+4 & a+1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

Bestäm alla reella tal a sådan att $\dim V(F) = 1$ och ange i så fall en bas för $V(F)$.

17.34. Den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ges i en given bas av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2a \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm alla reella tal a så att $N(F) \cap V(F) \neq \emptyset$

17.35. Avbildningen $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definieras genom

$$F(p)(x) = p'(x) + xp''(x).$$

Bestäm en bas för $N(F)$ och en bas för $V(F)$.

17.36. Den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ har i basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ matrisen

$$A_{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ange F:s matris $A_{\boldsymbol{f}}$ i basen

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{f}_1 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2.$$

Ange också sambandet mellan koordinaterna i de båda baserna.

17.37. Antag att $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ är en bas för $\mathbf{R}^3$ och låt den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definieras genom

$$F(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \qquad F(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \qquad F(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

Bestäm matrisen för F med avseende på basen $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$, där

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

17.38. Låt $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ vara en bas i rummet ocf F en linjär avbildning mad matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i denna bas. Vad är matrisen för F i den bas $\underline{\boldsymbol{f}}$ som ges av

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{f}_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2.$$

17.39. Avbildningen F har i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i basen $\underline{\boldsymbol{f}}$ omv

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1.$$

17.40. Visa att matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ej kan representera samma linjära avbildning $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$.

17.41. Betrakta $\mathcal{P}_2 = [1, x, x^2]$. Avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definieras som

$$F(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}, \qquad p \in \mathcal{P}_2.$$

Bestäm $V(F)$, $N(F)$ och matrisen för F med avseende på basen $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$.

17.42. Givet en ON-bas i planet. En isometrisk avbildning F är en avbildning som bevarar skalärprodukten, dvs

$$(F(\boldsymbol{u}|F(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}).$$

Antag att en sådan avbildning avbildar $(1,0)^t$ på $(0,1)^t$. Vilka är de möjliga bilderna av $(1,1)^t$?