

12.3. Tillämpningar

Exempel 12.37. Betrakta rummet $\mathcal{P}_2 = [1, x, x^2]$ på intervallet $[-1, 1]$ med skalärprodukten

$$\int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

Mängden $\{1, x, x^2\}$ är som bekant en bas i \mathcal{P}_2 men inte en ON-bas, ty polynomen $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x$ och $q_2(x) = x^2$ är varken ortogonala eller normerade. T.ex. gäller att

$$(q_0|q_2) = \int_{-1}^1 q_0(x)q_2(x) dx = \int_{-1}^1 1 \cdot x^2 dx = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Vi använder G-S processen på mängden $\{q_0, q_1, q_2\}$ för att konstruera en ON-bas. Normen av första hjälppolynomet $r_0 = q_0$ ges av

$$\|r_0\| = \sqrt{(r_0|r_0)} = \sqrt{\int_{-1}^1 1 dx} = \sqrt{2}.$$

Första baspolynomet får vi till:

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{(r_0|r_0)}} r_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vi bildar hjälppolynomet

$$r_1(x) = q_1(x) - (q_1|p_0)p_0.$$

Eftersom

$$(q_1|p_0) = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0,$$

så är

$$r_1(x) = q_1(x) - (q_1|p_0)p_0 = x - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x.$$

Normen av $r_1(x) = x$, ges av

$$\|r_1\| = \sqrt{(r_1|r_1)} = \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Således, är andra baspolynomet

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{(r_1|r_1)}} r_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x.$$

Vidare gäller att

$$(q_2|p_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3\sqrt{2}} \quad \text{samt} \quad (q_2|p_1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0,$$

så att

$$r_2(x) = q_2(x) - (q_2|p_0)p_0 - (q_2|p_1)p_1 = x^2 - \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Normen av r_2 är

$$\|r_2\| = \sqrt{(r_2|r_2)} = \sqrt{\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{8}{45}}.$$

Sätt $p_2(x) = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$ och mängden $\{p_0, p_1, p_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$ blir en ON-bas i \mathcal{P}_2 .

Exempel 12.38. Betrakta funktionen $f(x) = e^x$ på intervallet $[-1, 1]$. I analyskurser visar man att maclaurinpolynomet

$$q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

är det polynom $q \in \mathcal{P}_2$ som bäst approximerar $f(x) = e^x$ kring punkten $x = 0$. Om vi beräknar avståndet (dvs "felet") från f till q , får vi

$$\|f - q\| = \sqrt{(f - q|f - q)} = \sqrt{\int_{-1}^1 (f(x) - q(x))^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right)^2 dx} \approx 0.822.$$

I Exempel 12.37 ovan konstruerade vi ON-basen $\{p_0, p_1, p_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \frac{\sqrt{45}}{8} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$ i \mathcal{P}_2 . Funktionen $f(x) = e^x \notin \mathcal{P}_2$ kan projiceras ortogonalt på \mathcal{P}_2 i syfte att ta fram det polynom $p \in \mathcal{P}_2$ som bäst approximerar e^x på $[-1, 1]$, dvs har kortast avstånd och därmed också minst fel till e^x . Ortogonala projektionen av e^x på $[p_0, p_1, p_2]$ ges enligt Definition 12.18 av polynomet

$$p(x) = (e^x|p_0)p_0 + (e^x|p_1)p_1 + (e^x|p_2)p_2. \quad (12.8)$$

Eftersom

$$(e^x|p_0) = \int_{-1}^1 e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}(e - e^{-1}),$$

$$(e^x|p_1) = \int_{-1}^1 e^x \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} 2e^{-1},$$

och

$$(e^x|p_2) = \int_{-1}^1 e^x \cdot \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}} \left(\frac{2e}{3} - \frac{14e^{-1}}{3}\right).$$

så får vi om vi sätter in dessa koefficienter i polynomet $p(x)$ i 12.8 och förenklar:

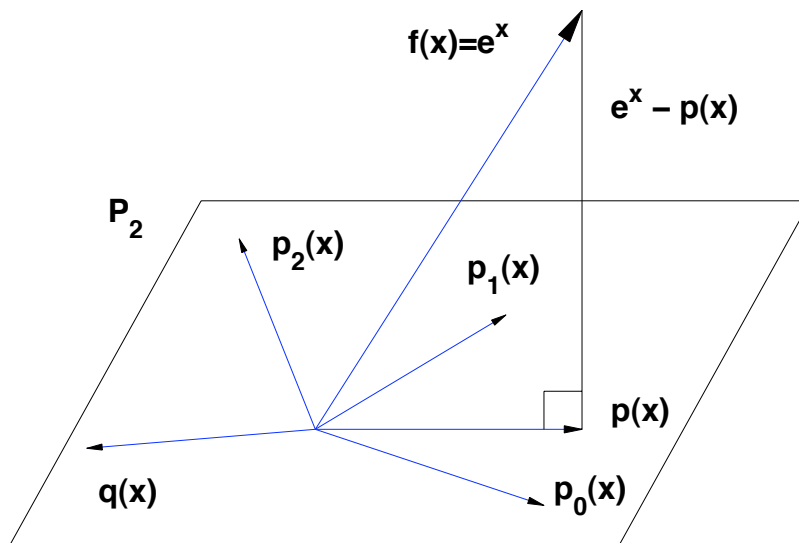
$$p(x) = \frac{3(11e^{-1} - e)}{4} + 3e^{-1}x + \frac{15(e - 7e^{-1})}{4}x^2.$$

Avståndet blir då

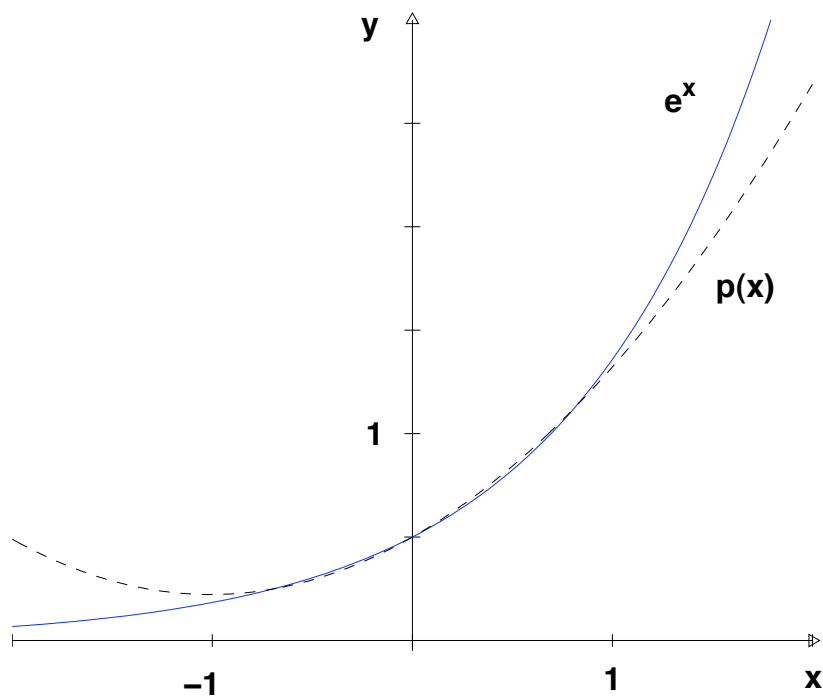
$$\|f - p\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (e^x - p(x))^2 dx} \approx 0.04.$$

Felet här är klart mindre än när vi approximerade med taylorpolynomet $q(x)$. Detta har sin förklaring i att taylorpolynomet $q(x)$ tar hänsyn till f endast lokalt, dvs bara i närheten av $x = 0$, medan $p(x)$ tar hänsyn till f globalt, dvs på hela intervallet $[-1, 1]$.

Figur 12.39.



Figur 12.40.



Trigonometriska funktioner är lämpliga att approximera med i situationer där vågor förekommer; dessa kan vara ljud och svängningssystem m.m. En annan fördel som trigonometriska funktioner har gentemot t.ex. Taylorpolynom är om man vill approximera en funktion med Taylorpolynom av grad n så krävs av funktionen att vara n gånger kontinuerligt deriverbar. Nedan ska vi approximera en funktion som inte ens är kontinuerlig.

Exempel 12.41. Betrakta rummet av kontinuerliga funktioner $C(-\pi, \pi)$ med skalärprodukten

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

Vi har tidigare visat att följderna $\{\cos jx\}_{j=0}^{\infty}$ är linjärt oberoende $C(-\pi, \pi)$. Man kan på samma sätt visa att även följderna $\{\sin jx\}_{j=0}^{\infty}$ är linjärt oberoende $C(-\pi, \pi)$.

Det gäller faktiskt mer än så. Enligt Exempel 12.11, så är $\cos x$ och $\sin x$ ortogonala. Detta är ingen slump. I själva verket är mängden $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \dots\}$ ortogonal och normerad ser den ut enligt

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3x, \dots \right\}.$$

Låt oss bevisa detta. Ortogonala:

$$1. (1 | \cos x) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos x dx = 0.$$

$$2. (1 | \sin x) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin x dx = 0.$$

3. $j \neq \pm k$:

$$\begin{aligned} (\cos jx | \cos kx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(j-k)x + \cos(j+k)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(j-k)x}{j-k} + \frac{\sin(j+k)x}{j+k} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

4. $j \neq \pm k$:

$$(\sin jx | \sin kx) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(j-k)x - \cos(j+k)x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(j-k)x}{j-k} + \frac{\sin(j+k)x}{j+k} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

5. $j \neq \pm k$:

$$(\sin jx | \cos kx) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(j-k)x + \sin(j+k)x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(j-k)x}{j-k} + \frac{\cos(j+k)x}{j+k} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

6. $j = k$:

$$(\sin kx | \cos kx) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2kx dx = 0.$$

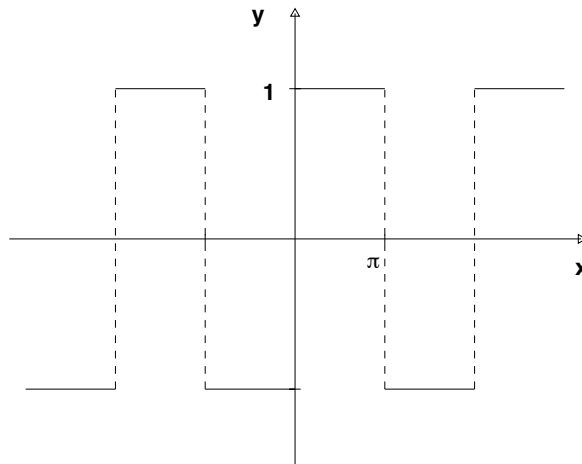
Normerade om $j = \pm k$:

$$1. \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos jx \middle| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos jx \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 jx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2jx) \, dx = 1.$$

$$2. \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin jx \middle| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin jx \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 jx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2jx) \, dx = 1.$$

Betrakta nu periodiska **fyrkantsvågen** $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & -\pi < x < 0, \end{cases}$ med perioden 2π .

Figur 12.42.



Projicerar vi nu f på linjära höljet av ON-mängden

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3x, \dots \right]$$

får vi att ortogonala projektionen g av f ges enligt:

$$g(x) = \left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \left(f \middle| \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + \left(f \middle| \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + \left(f \middle| \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} + \dots \quad (12.9)$$

Eftersom f är udda följer att $f(x) \cos jx$ är udda över det symmetriska intervallet $[-\pi, \pi]$, och därmed gäller

$$\left(f \middle| \frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx \, dx = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

så att ortogonala projektionen g i (12.9) är reducerad till

$$g(x) = \left(f \middle| \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + \left(f \middle| \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} + \left(f \middle| \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \left(f \middle| \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}. \quad (12.10)$$

Vidare gäller att $f(x) \sin jx$ är jämn och då

$$\begin{aligned} \left(f \middle| \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin jx \, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin jx \, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sin jx \, dx \\ &= \{j \neq 0\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\cos jx}{j} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - \cos j\pi}{j} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - (-1)^j}{j}. \end{aligned}$$

Vi ser att om j är jämnt, dvs $j = 2k$, så är

$$\left(f \middle| \frac{\sin 2kx}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - (-1)^{2k}}{2k} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - 1}{2k} = 0.$$

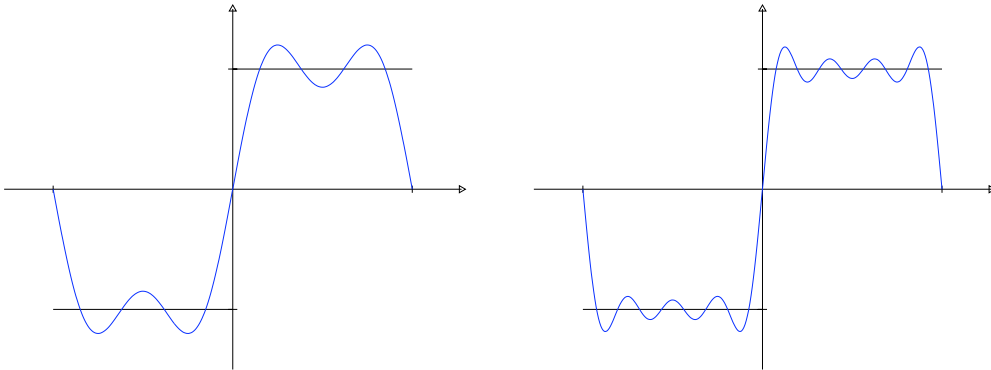
Om j är udda, dvs $j = 2k + 1$, så

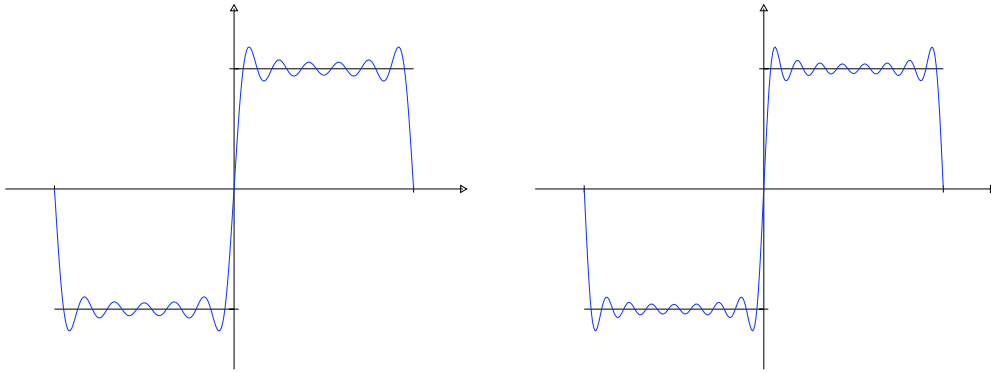
$$\left(f \middle| \frac{\sin(2k+1)x}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - (-1)^{2k+1}}{2k+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - (-1)}{2k+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{2k+1}.$$

Utnyttjar vi detta i (12.10) får vi att ortogonala projektionen g är alltså

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x.$$

Figur 12.43. Figurerna nedan visar hur g approximerar f då g är a) 2 termer, b) 4 termer, c) 6 termer, d) 8 termer





Utvecklingen av en funktion f som den i (12.9) kallas för **Fourierserie**. Som ni ser i figurerna så approximerar inte trigonometriskaserien g funktionen f i varje punkt utan g har minst avstånd (fel) till f vilket mäts i norm, dvs

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x \right\| = 0.$$

Vi säger också att g konvergerar mot f i norm.

En stor klass av funktioner, styckvis kontinuerliga, kan fourieserietvecklas:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

där

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Mer om fourierserier kommer vi träffa på i kurser som bildbehandling, reglerteknik, signalbehandling och transformteori.