21.3. Inhomogena linjära system

Vi har i förra avsnitt härlett en teori för begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) &= A\boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

där A är en diagonaliserbar matris. Vi kunde också visa i (21.12) att lösningen till detta problem ges av

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{tA}\boldsymbol{y}_0.$$

Denna teori kan generaliseras till **inhomogena system av differentialekvationer**

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) &= A\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

Man kan faktiskt följa stegen (21.3)-(21.12) i förra avsnittet och härleda lösningen

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{tA}\boldsymbol{y}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau.$$

Exempel 21.6. Lös $\begin{cases} y_1'(t) &= 2y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) &= 4y_1(t) - 3y_2(t) \quad + \quad e^t, \end{cases}$ där $y_1(0) = 1$ och $y_2(0) = 0$.

Lösning: Vi skriver systemet på matrisform $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{f}(t)$, där $\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar med $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ och $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Vi får att

$$\boldsymbol{y}_H(t) = e^{tA}\boldsymbol{y}_0 = Te^{tD}T^{-1}\boldsymbol{y}_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4e^t - e^{-2t} & -e^t + e^{-2t} \\ 4e^t - e^{-2t} & -e^t + 4e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4e^t - e^{-2t} \\ 4e^t - 4e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Vidare gäller att

$$e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4e^{t-\tau} - e^{-2(t-\tau)} & -e^{t-\tau} + e^{-2(t-\tau)} \\ 4e^{t-\tau} - e^{-2(t-\tau)} & -e^{t-\tau} + 4e^{-2(t-\tau)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^t + e^{-2t+3\tau} \\ -e^t + 4e^{-2t+3\tau} \end{pmatrix},$$

samt

$$\boldsymbol{y}_P(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3te^t + e^t - e^{-2t} \\ -3te^t + 4e^t - 4e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen ges därmed av

$$\boldsymbol{y}_A(t) = \boldsymbol{y}_H(t) + \boldsymbol{y}_P(t) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9te^t + 13e^t - 4e^{-2t} \\ -3te^t + 16e^t - 16e^{-2t} \end{pmatrix},$$

dvs $y_1(t) = (-9te^t + 13e^t - 4e^{-2t})/9$ och $y_2(t) = (-3te^t + 16e^t - 16e^{-2t})/9$.