19.3. Spektraluppdelning

För en symmetrisk matris A gäller enligt Spektralsatsen Sats 19.7 sambandet

$$A = TDT^t, \tag{19.3}$$

där T är en ortogonal matris som innehåller i sina kolonner en ON-bas av egenvektorer till A och D är en diagonalmatris med egenvärdena till A på diagonalen och noll för övrigt. Låt oss titta lite närmare på matrissambandet i (19.3) och vi håller oss till rummet, dvs $n = 3$. Det gäller att

$$A = TDT^t = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - - \boldsymbol{v}_1^t - - \\ - - \boldsymbol{v}_2^t - - \\ - - \boldsymbol{v}_3^t - - \end{pmatrix} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^t + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_2^t + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 \boldsymbol{v}_3^t.$$

Detta kallas för **spektraluppdelning** och i högre dimensioner ser det förstås ut

$$A = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^t + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_2^t + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n \boldsymbol{v}_n^t.$$

Låt oss studera en av termerna i uppdelningen ovan, t.ex. $\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^t$. Vi vet att det följer av projektionsformeln att projektionen P_1 av en godtycklig vektor $\boldsymbol{u}$ på vektorn $\boldsymbol{v}_1$ ges av

$$P_1(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|^2} \boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{v}_1^t \boldsymbol{u})\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{v}_1^t \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^t)\boldsymbol{u},$$

där vi har utnyttjat att $\boldsymbol{v}_1$ är normerad, dvs $|\boldsymbol{v}_1|^2 = 1$, samt att skalärprodukten $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_1$ också kan skrivas som matrisprodukten $\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{v}_1$, se Anmärkning 12.4. Detta betyder att projektionen P_1 på $\boldsymbol{v}_1$ ges av

$$P_1 = \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^t.$$

På samma sätt gäller att projektionen P_j på $\boldsymbol{v}_j$ ges av

$$P_j = \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^t \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Vi är då framme vid följande sats.

Sats 19.16. Om F är en symmetrisk avbildning på ett n-dimensionellt euklidiskt rum E, så ges **spektraluppdelningen** av F via

$$F = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n.$$

Vidare gäller om F har matrisen A så är

$$A = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^t + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_2^t + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n \boldsymbol{v}_n^t.$$

Låt oss se hur spektraluppdelningen ser ut fär några avbildningar. Vi har i bl.a. i Exempel 16.14 sett att en ortogonalprojektion P på ett plan har avbildningsmatrisen

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Egenvärden med tillhörande egenvektorer till P är $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 1$ och $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{3}(2,-1,-2)^t$, $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{3}(2,2,1)^t$ och $\boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{3}(1,-2,2)^t$. De ortogonala projektionen på respektive egenvektor ges av

$$P_1 = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^t = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}(2\ -1\ -2) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^t = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(2\ 2\ 1) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$P_3 = \boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_3^t = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}(1\ -2\ 2) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Spektraluppdelningen visar nu att

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^t + \lambda_2\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^t + \lambda_3\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_3^t = 1\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

Speglingen i Exempel 16.17 har matrisen $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Spektraluppdelningen ger i det här fallet att

$$\begin{aligned} \lambda_1\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^t &+ \lambda_2\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^t + \lambda_3\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_3^t \\ &= -1\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 1\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$