1. Inledning

I Linjär algebra studerar vi olika objekt samt deras egenskaper. Dessa objekt kan ha geometrisk tolkning såsom **geometriska vektorer** men också inte som t.ex. **matriser**.

Vi har tidigare i grundkursen betecknat vektorer med $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \ldots$ eller $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots$. Vi har sett att i ett koordinatsystem i rummet med basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ kan vi skriva vektorn $\boldsymbol{u}$ med hjälp av dess koordinater x, y och z enligt

$$\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}X, \quad \text{där} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Vi har också härlett räknelagar samt definierat det viktiga begreppet **skalärprodukt** för vektorer, se (1.4).
Här kommer vi att studera dessa vektorer lite djupare och se hur vi kan tillämpa dessa i olika viktiga situtationer. För att kunna göra detta behöver vi ett funktionsbegrepp som vi kallar **linjär avbildning** och som vi betecknar F.
En Linjär avbildning F svarar i endimensionella fallet mot funktionen, $y = f(x) = ax$. En definitionsmängd samt en värdemängd kommer att höra till den linjära avbildningen F. Dessa mängder kallas **vektorrum** och betecknas V. På samma sätt som talet a representerar funktionen $f(x) = ax$ kommer en **matris** A att representera F, så att

$$F(\underline{\boldsymbol{e}}\,X) = \underline{\boldsymbol{e}}AX.$$

Till den linjära avbildningen F hör också en mycket viktig mängd vektorer; de som kallas för **egenvektorer** till F. Egenvektorer $\boldsymbol{v}$ har den unika egenskapen att de avbildas på en sträckning, $\lambda \in \mathbf{R}$, av sig själva (eller motsatt riktning) under F, dvs

$$F(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}.$$

Talet λ kallas för **egenvärdet** till F med tillhörande egenvektorn $\boldsymbol{v}$.
Många frågeställningar i linjär algebra kommer så småningom att kräva att man kan lösa system av linjära ekvationer. En av de enklaste linjära ekvationer är räta linjens ekvation som på **normalform** ser ut

$$Ax + By = C. \tag{1.2}$$

Om vi sätter $y = t$, $t \in \mathbf{R}$ och löser ut $x = \dfrac{C}{A} - \dfrac{B}{A}t$ kan linjens ekvation i (1.2) skrivas på **parameterformen**

$$\begin{cases} x &= \dfrac{C}{A} - \dfrac{B}{A}t \\ y &= t \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C/A \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -B/A \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ur denna form ser vi att vektorn $\begin{pmatrix} C/A \\ 0 \end{pmatrix}$ är ortsvektorn för punkten $(C/A, 0)$ på linjen.
Utgår vi från denna punkt och följer riktningen $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -B/A \\ 1 \end{pmatrix}$ kommer vi med rätt värde på steglängden t att nå varje punkt på linjen. Därav kallar vi $\boldsymbol{v}$ för linjens **riktningsvektor**.

Förutom riktningsvektorn är för linjen **normalen** $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ en annan viktig vektor. Dessa två vektorer är **ortogonala**, ty $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Därav säges linjens ekvation i (1.2) vara en ekvation på normalform.
Lösningsmängden för följande system av linjära ekvationer

$$\begin{cases} A_1x + B_1y &= C_1 \\ A_2x + B_2y &= C_2 \end{cases}$$

beskriver således geometriskt **skärningsmängden** mellan linjerna. Denna mängd kan antingen vara tom då linjerna är parallella, en punkt eller oändligt många punkter då linjerna sammanfaller.
Mängden av punkter (x, y, z) i rummet som satisfierar den linjära ekvationen

$$Ax + By + Cz = D \tag{1.3}$$

beskriver geometriskt ett plan i rummet. Till planet i (1.3) hör en normal $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ som är ortogonal mot planet. Därav säger vi att ekvationen är skriven på normalform. Låt oss visa detta. Vi sätter $y = \lambda_1$ och $z = \lambda_2$, där $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Då kan ekvationen i (1.3) skrivas på formen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D/A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -B/A \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -C/A \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Här ser vi att punkten (x, y, z) ligger i planet bara om vektorn $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D/A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ är **parallell med** planets riktningsvektorer

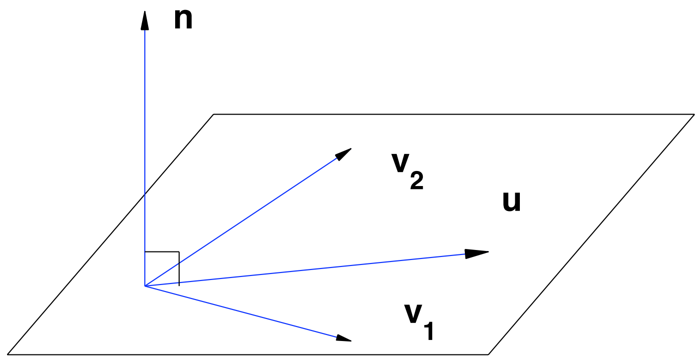
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -B/A \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -C/A \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Här och framöver kommer begreppet **parallell med** att ersättas med det mer allmänna begreppet **linjärkombination i**. Vi säger då att planet är mängden av alla vektorer $\boldsymbol{u}$ som är en linjärkombination i vektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ och vi skriver

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2.$$

Att normalen $\boldsymbol{n}$ är ortogonal mot planet är detsamma som att normalen är ortogonal mot varje vektor i planet. Speciellt gäller att

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_1 &= \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -B/A \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= -A \cdot \dfrac{B}{A} + B &= 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_2 &= \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -C/A \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -A \cdot \dfrac{C}{A} + C &= 0 \end{cases}$$



Nedan påminner vi om vissa begrepp från vektorgeometrin i grundkursen som vi behöver vara förtrogna med för fortsättningen. T.ex. bör vi

1. komma ihåg att en **vektor** är en mängd som består av alla riktade sträckor som är lika långa och som har samma riktning och att vi brukar räkna med en representant för denna mängd.

2. veta hur nollvektorn resp. ortsvektorn till en punkt är definierade.

3. kunna räknelagarna för vektorer såsom addition mellan vektorer, multiplikation av ett reellt tal med en vektor samt räkna ut längden för en vektor.

4. veta att om $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ är två ortogonala vektorer med längd 1, så säger vi att mängden $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ är en **ortonormerad bas**, förkortas ON-bas, i planet.

5. att ON-basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ **spänner** upp planet, dvs till varje vektor $\boldsymbol{u}$ finns talpar (x, y) som kallas **koordinater** och som är sådana att $\boldsymbol{u}$ är en linjärkombination av basen $\underline{\boldsymbol{e}}$, dvs
$$\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2.$$

6. veta att om $\underline{\boldsymbol{e}}$ är en ON-bas i planet så är $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ ett rätvinkligt koordinatsystem.

7. veta att motsvarande gäller för rummet där ON-basen är $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

Vi behöver också vara bekanta med begreppet vinkelräta vektorer eller som vi allmännare kommer att säga **ortogonala** vektorer. För detta behöver vi en **skalärprodukt** som ska vara definierad. Vi behöver t.ex. kunna veta att

1. **skalärprodukten** mellan två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ definieras via

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta, \tag{1.4}$$

där θ är vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.

2. om $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ är en ON-bas i rummet, så gäller att

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j, \\ 0, & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

3. för vektorer $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X$, där $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}Y$, där $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ givna i en ON-bas $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ gäller att

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{1.5}$$

4. Längden $|\boldsymbol{u}|$ av vektorn $\boldsymbol{u}$ kan beräknas enligt (1.5):

$$|\boldsymbol{u}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}. \tag{1.6}$$

5. om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är två vektorer givna i ON-basen $\underline{\boldsymbol{e}}$, så kan $\boldsymbol{v}$ skrivas som en **ortogonal-projektion** på $\boldsymbol{u}$, dvs

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}},$$

där

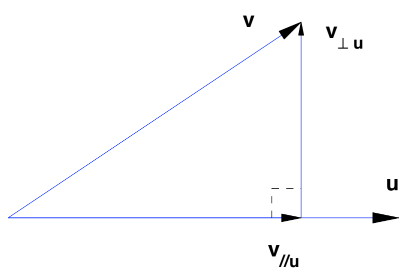
$$\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\,\boldsymbol{u} \tag{1.7}$$

är **parallell** med $\boldsymbol{n}$ och

$$\boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\,\boldsymbol{u} \tag{1.8}$$

är **ortogonal** mot $\boldsymbol{n}$.

Figur 1.1.



Bevis: Att $\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}$ är parallell med $\boldsymbol{u}$ betyder att det finns ett reellt tal λ, så att

$$\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} = \lambda \boldsymbol{u}.$$

Eftersom $\boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}}$ är ortogonal mot $\boldsymbol{u}$, dvs $\boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ och $\boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}$, följer att

$$0 = \boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}.$$

Alltså är

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}$$

och formlerna (1.7) och (1.8) därmed följer.
6. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}$ har samma riktning, dvs vinkeln mellan dem är 0, får vi att

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}| \cos 0 = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}|.$$

7. Pythagoras sats säger

$$|\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}|^2 + |\boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}}|^2.$$

8. följande räknelagar gäller för skalärprodukten:

a) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$

b) $\boldsymbol{u} \cdot (\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}), \qquad \lambda \in \mathbf{R}$

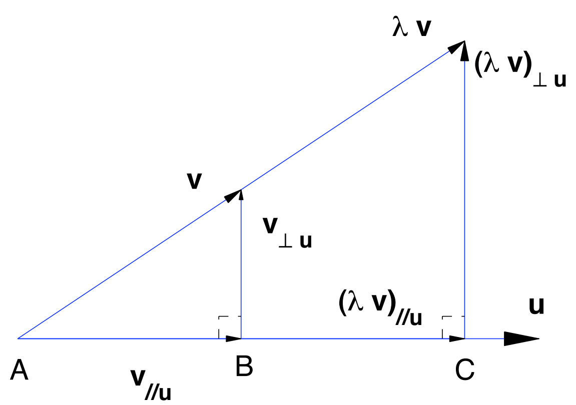
c) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2$

d) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

e) $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$

Lagen i a) brukar vi kalla för den **kommutativa lagen**. I b) brukar vi säga att skalärprodukten är **homogen** och i c) och d) att den är **positiv**. Sista lagen i e) kallar vi för **distributiva lagen**. Lagarna a), c) och d) följer direkt ur Definitionen 1.4. Verifera gärna detta! För b) antar vi att $\lambda > 0$ och ritar figuren

Figur 1.2.



Av likformighet i trianglarna följer att

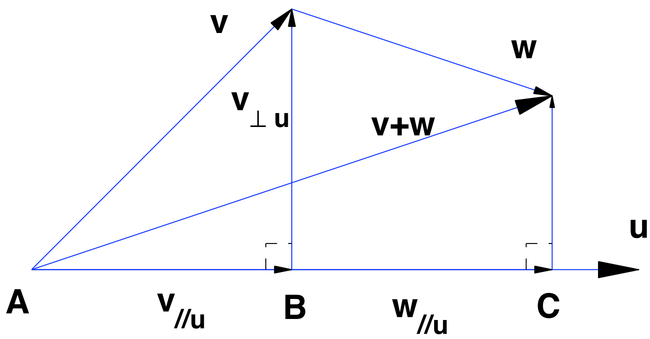
$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} = \lambda \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}.$$

Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}$ har samma riktning så får vi

$$\boldsymbol{u} \cdot (\lambda \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{u} \cdot \lambda \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} = |\boldsymbol{u} \cdot \lambda \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}| = \lambda |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}| = \lambda \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} = \lambda \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Verifera gärna fallet $\lambda < 0$! Slutligen visar vi den distributiva lagen i e). Av figuren

Figur 1.3.



framgår att projektionen av $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ på $\boldsymbol{u}$ är lika med summan av projektionerna av $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ eftersom

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})_{\|\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{w}_{\|\boldsymbol{u}}.$$

Om, som i figuren visar, $\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}$ och $\boldsymbol{w}_{\|\boldsymbol{u}}$ har samma riktning som $\boldsymbol{u}$ gäller att

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})_{\|\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}_{\|\boldsymbol{u}} \\
&= |\boldsymbol{u}|\, |\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{w}_{\|\boldsymbol{u}}| = |\boldsymbol{u}|\, (|\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}| + |\boldsymbol{w}_{\|\boldsymbol{u}}|) = |\boldsymbol{u}|\, |\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}}| + |\boldsymbol{u}|\, |\boldsymbol{w}_{\|\boldsymbol{u}}| \\
&= \boldsymbol{u}| \cdot \boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}_{\|\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}.
\end{aligned}$$

Repetera gäna följande övningar från kompendiet **Vektorer, linjer och plan**:

1. Kap 1: 1-7
2. Kap 2: 1, 2, 7
3. Kap 3: 1, 4, 6-8
4. Kap 4: 1, 3, 5, 6, 8-13