

## 16.8. Basbyte

I det här avsnittet kommer vi att gå från en bas till en annan, dvs vi kommer att utföra vad vi kallar för **basbyte**.

**Exempel 16.43.** Låt  $\{e_1, e_2, e_3\}$  och  $\{f_1, f_2, f_3\}$  vara två givna baser i ett vektorrum  $V$ . Vi tänker oss dessutom att vi känner till sambandet mellan dessa baser, t.ex via

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = e_1 + e_2 \\ f_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \quad (16.13)$$

Vidare skulle vi kunna betrakta  $\{f_1, f_2, f_3\}$  som en "ny" bas given i en "gammal" bas  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Eftersom

$$f_1 = 1 \cdot e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad f_3 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så kan sambandet (16.13) skrivas på matrisform:

$$(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \underbrace{0}_{=f_1} & \underbrace{0}_{=f_2} & \underbrace{1}_{=f_3} \end{pmatrix}.$$

Detta kallas för **Bassambandet** mellan  $\underline{e}$  och  $\underline{f}$  och skrivs

$$\underline{f} = \underline{e}T \quad (16.14)$$

Matrisen  $T$  kallas **transformationsmatrisen** (eller **basbytesmatrisen**) för basbytet i (16.14)

Lägg märke till att koordinaterna för  $f_j$ :na,  $j = 1, 2, 3$  är uppställda som kolonner i  $T$ . Eftersom  $f_j$ :na är en bas, så är dessa kolonner linjärt oberoende vilket medför att matrisen  $T$  är inverterbar. I det här exemplet är inversen till  $T$ :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det **omvända bassambandet** ges därför av

$$\underline{e} = \underline{f}T^{-1}$$

eller komponentvis:

$$(e_1, e_2, e_3) = (f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = f_1 \\ e_2 = -f_1 + f_2 \\ e_3 = f_2 + f_3 \end{cases}$$

Om  $\mathbf{u}$  är en godtycklig vektor i  $V$  given i såväl den gamla basen med gamla koordinater  $X$ , dvs  $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}X$ , som i den nya basen med nya koordinater  $Y$ , dvs  $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{f}}Y$ , så erhåller vi

$$\underline{\mathbf{e}}X = \mathbf{u} = \underline{\mathbf{f}}Y \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{e}}X = \underline{\mathbf{f}}Y.$$

Använder vi bassambandet i (16.14), så får vi

$$\underline{\mathbf{e}}X = \underline{\mathbf{f}}Y \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{e}}X = \underline{\mathbf{e}}TY \quad \Leftrightarrow \quad X = TY.$$

Detta ger **koordinatsambandet**

$$X = TY \quad \Leftrightarrow \quad Y = T^{-1}X. \quad (16.15)$$

Komponentvis kan detta skrivas:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = \phantom{y_1} + y_2 + y_3 \\ x_3 = \phantom{y_1} + \phantom{y_2} + y_3 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = \phantom{x_1} - x_2 - x_3 \\ y_3 = \phantom{x_1} + \phantom{x_2} + x_3 \end{cases}$$

Låt oss se vilka koordinater vektorn  $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$  har i den nya basen given i (16.14). Enligt koordinatsambandet (16.15), så ges de nya koordinaterna av

$$Y = T^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så att  $\mathbf{u} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$  i nya basen.

**Exempel 16.44.** Låt  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  vara en bas i  $\mathbf{R}^3$ . Visa att vektorerna

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

bildar en ny bas i  $\mathbf{R}^3$ . Bestäm bassambandet och koordinatsambandet mellan den gamla och den nya basen. Bestäm också koordinaterna för  $\mathbf{u} = 6\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_3$  i den nya basen.

**Lösning:** Mängden  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$  är linjärt oberoende, ty systemet

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{f}_1 + \lambda_2 \mathbf{f}_2 + \lambda_3 \mathbf{f}_3 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

har endast den triviala lösningen. Alltså är  $\underline{\mathbf{f}} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$  en ny bas i  $\mathbf{R}^3$ . Bassambandet blir då

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ \underbrace{1}_{=\mathbf{f}_1} & \underbrace{-1}_{=\mathbf{f}_2} & \underbrace{1}_{=\mathbf{f}_3} \end{pmatrix}.$$

Koordinatsambandet får vi ur (16.15), så att om vi låter en godtycklig vektor  $\mathbf{u}$  ha koordinaterna  $X$  i den gamla basen  $\underline{\mathbf{e}}$ , dvs  $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}X$  och koordinaterna  $Y$  i den nya basen  $\underline{\mathbf{f}}$ , dvs  $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{f}}Y$ , följer att

$$X = TY \quad Y = T^{-1}X.$$

Vektorn  $\mathbf{u} = 6\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  har i den nya basen koordinaterna  $Y$  som är lösningen till

$$TY = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

Alltså är  $\mathbf{u} = 4\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_3$  i nya basen  $\underline{\mathbf{f}}$ .

Kalkylen miskar avsevärt då vi arbetar med ON-baser. T.ex. behöver vi inte invertera transformationsmatrisen  $T$  eftersom den är ortogonal, dvs

$$T^t T = E \quad \Leftrightarrow \quad T^{-1} = T^t.$$

Detta visas i nästa sats.

**Sats 16.45.** Transformationsmatrisen mellan två ON-baser är ortogonal.

**Bevis:** Låt  $T$  vara transformationsmatrisen mellan ON-baserna  $\underline{e}$  och  $\underline{f}$  med bassambandet  $\underline{f} = \underline{e}T$ . Vi kommer att visa att

$$T^t T = E.$$

Betrakta elementet  $t_{jk}$  i matrisen  $T^t T$ . Enligt definitionen av multiplikation mellan matriser så gäller att

$$\begin{aligned} t_{jk} &= \text{rad } j \text{ i matris } T^t \times \text{kolonn } k \text{ i matris } T \\ &= \text{kolonn } j \text{ i matris } T \times \text{kolonn } k \text{ i matris } T \\ &= \underline{f}_j \cdot \underline{f}_k = \begin{cases} 1, & \text{om } j = k, \\ 0, & \text{om } j \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

vilket visar påståendet.

**Exempel 16.46.** Låt  $\underline{e}$  vara en ON-bas i  $\mathbf{R}^3$ . Då är mängden  $\underline{f} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ , där

$$\begin{cases} \underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3) \\ \underline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 - \underline{e}_3) \\ \underline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3) \end{cases}$$

en ny ON-bas i  $\mathbf{R}^3$ , ty dessa är både ortogonala och normerade. Bassambandet är då

$$\underline{f} = \underline{e}T \quad \text{där} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Matrisen  $T$  är ortogonal, ty  $TT^t = T^t T = E$ .