16.6. Sammansatta linjära avbildningar

Definition 16.31. Låt $F, G: \ V \to V$. Vi definierar sammansättningen F följt av G genom

$$H(\boldsymbol{u}) = G(F(\boldsymbol{u})).$$

Andra beteckningar som förekommer är $H = G \circ F$ och $H = GF$. Speciellt menas med

$$F^2(\boldsymbol{u}) = F(F(\boldsymbol{u})).$$

Låt A och B vara F:s respektive G:s matriser i en bas $\underline{\boldsymbol{e}}$ i V. Antag att $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X$ är en godtycklig vektor i V. Då vet vi att

$$F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}}AX$$

och

$$G(\underline{\boldsymbol{e}}Y) = \underline{\boldsymbol{e}}BY.$$

Sammansättningen ges då av

$$H(\boldsymbol{u}) = H(\underline{\boldsymbol{e}}X) = GF(\underline{\boldsymbol{e}}X) = G(F(\underline{\boldsymbol{e}}X)) = G(\underline{\boldsymbol{e}}AX) = \underline{\boldsymbol{e}}BAX = \underline{\boldsymbol{e}}BY,$$

där vi satt $Y = AX$. Matrisen till den sammansatta avbildningen GF är alltså BA.

Exempel 16.32. Låt $V = E^3$ och antag att $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ är en ON-bas i E^3. Om F är en ortogonal projektion på $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$-planet och G är en vridning moturs vinkeln π kring en rotationsaxel parallell med $\boldsymbol{e}_3$, så ges avbildningsmatriserna A respektive B av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den sammansatta avbildningsmatrisen ges därmed av

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$