

16.9. Linjära avbildningar och basbyte

Exempel 16.47. Antag att \underline{e} och \underline{f} är baser i ett vektorrum V med $\dim V = n$. Låt \mathbf{u} vara en vektor i V med gamla koordinater X i basen \underline{e} och nya koordinater Y i basen \underline{f} , dvs

$$\underline{e}X = \mathbf{u} = \underline{f}Y$$

med bassambandet

$$\underline{f} = \underline{e}T$$

och koordinatsambandet

$$X = TY \quad \text{dvs} \quad Y = T^{-1}X.$$

Låt nu $F : V \rightarrow V$ vara en linjär avbildning. Antag att F har avbildningsmatrisen A_e i basen \underline{e} och A_f i basen \underline{f} , dvs

$$F(\mathbf{u}) = F(\underline{e}X) = \underline{e}A_eX, \quad (16.16)$$

och

$$F(\mathbf{u}) = F(\underline{f}Y) = \underline{f}A_fY. \quad (16.17)$$

Eftersom vänstra leden i (16.16) och (16.17) är lika, måste även högra leden vara lika

$$\underline{e}A_eX = \underline{f}A_fY. \quad (16.18)$$

Utnyttjar vi bassambandet $\underline{f} = \underline{e}T$ i (16.18), får vi

$$\underline{e}A_eX = \underline{f}A_fY \quad \Leftrightarrow \quad \underline{e}A_eX = \underline{e}TA_fY,$$

dvs

$$A_eX = TA_fY. \quad (16.19)$$

Slutligen, fäs då vi sätter in koordinatsambandet $Y = T^{-1}X$ i (16.19) att

$$A_eX = TA_fT^{-1}X \quad \text{dvs} \quad A_e = TA_fT^{-1}.$$

Vi sammanfattar resultatet i Exempel 16.47:

Sats 16.48. Sambandet mellan avbildningsmatriserna A_e och A_f i basen \underline{e} respektive basen \underline{f} ges av:

$$A_e = TA_fT^{-1} \quad \text{eller} \quad A_f = T^{-1}A_eT. \quad (16.20)$$

Vidare, om \underline{e} och \underline{f} är ON-baser, så är

$$A_e = TA_fT^t \quad \text{eller} \quad A_f = T^tA_eT. \quad (16.21)$$

Exempel 16.49. Den linjära avbildningen F har i ON-basen $\underline{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ i \mathbf{R}^3 matrisen

$$A_e = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -1 \\ -4 & 14 & -4 \\ -1 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen för F i den bas som ges av

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3) \\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3) \\ \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3) \end{cases}$$

Lösning: Enligt Exempel 16.46, så är den nya mängden $\underline{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ en ny ON-bas för \mathbf{R}^3 . Basbytet är mellan två ON-baser med en ortogonal transformationsmatrisen:

$$\underline{f} = \underline{e}T \quad \text{där} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt Sats 16.21 gäller sambandet $A_f = T^t A_e T$ mellan matriserna till F i de olika baserna. F 's matris i basen \underline{f} är då

$$\begin{aligned} A_f &= T^t A_e T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -4 & -1 \\ -4 & 14 & -4 \\ -1 & -4 & 11 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jämför med Exempepl 8.20; då vi sökte bestämma λ , så att systemet $AX = \lambda X$ hade andra lösningar är nolllösningen. Vi fick då $\lambda = 6$ med tillhörande lösning $\mathbf{f}_1 = \underline{e}X_1$, $\lambda = 12$ med tillhörande lösning till systemet $\mathbf{f}_2 = \underline{e}X_2$ och $\lambda = 18$ med tillhörande lösning till systemet $\mathbf{f}_3 = \underline{e}X_3$.