

16.2. Matrisframställning

Enligt Exempel 16.12 räcker det om vi känner bilden av basvektorerna \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 och \mathbf{e}_3 under F för att vi ska kunna bestämma bilden av varje vektor \mathbf{u} , ty låt

$$\mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad \text{dvs} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}X.$$

Då följer att

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) &= F(\underline{\mathbf{e}}X) = F(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = xF(\mathbf{e}_1) + yF(\mathbf{e}_2) + zF(\mathbf{e}_3) \\ &= \begin{pmatrix} \left. \begin{array}{c} | \\ F(\mathbf{e}_1) \\ | \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} | \\ F(\mathbf{e}_2) \\ | \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} | \\ F(\mathbf{e}_3) \\ | \end{array} \right. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}AX. \end{aligned}$$

Vi har därmed visat följande sats.

Sats 16.9. Låt $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ vara en bas för V och låt $F : V \rightarrow V$ vara linjär. Då ges bilden av en godtycklig vektor $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}X$ av:

$$F(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{e}}AX,$$

där matrisen A innehåller i sina kolonner bilden av basvektorerna, dvs

$$A = \begin{pmatrix} \left. \begin{array}{c} | \\ F(\mathbf{e}_1) \\ | \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} | \\ F(\mathbf{e}_2) \\ | \end{array} \right. & \cdot & \cdot & \cdot & \left. \begin{array}{c} | \\ F(\mathbf{e}_n) \\ | \end{array} \right. \end{pmatrix}.$$

Exempel 16.10. Låt $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vara en avbildning på rummet, där $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

1. Är F linjär?
2. Bestäm bilden av vektorerna \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 och \mathbf{e}_3 .
3. Bestäm avbildningsmatrisen till F . Om F är linjär.
4. Bestäm också $F(\mathbf{w})$ om $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$.

Lösning: 1. Vi börjar med additivitet. Enligt räknelagarna för vektorprodukt gäller att

$$F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v} = (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2).$$

Homogenitet:

$$F(\lambda \mathbf{u}) = (\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \lambda F(\mathbf{u}).$$

Alltså är F linjär.

2. Bilden av basvektorerna:

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

och

$$F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3a. F 's matris innehåller i sina kolonner bilden av basvektorerna, så att

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ F(\mathbf{e}_1) & F(\mathbf{e}_2) & F(\mathbf{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3b. A kan också bestämmas via bilden av endast en vektor $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ fast godtycklig sådan:

$$F(\mathbf{u}) = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

Förenkling ger

$$F(\mathbf{u}) = (x_2 - x_3)\mathbf{e}_1 + (-x_1 + x_3)\mathbf{e}_2 + (x_1 - x_2)\mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Omskrivning med hjälp av matris:

$$F(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

4a. Bilden $F(\mathbf{w})$ kan bestämmas med hjälp av bilden av basvektroerna

$$\begin{aligned} F(\mathbf{w}) &= F(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3) = F(\mathbf{e}_1) + 2F(\mathbf{e}_2) + 3F(\mathbf{e}_3) \\ &= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4b. eller också genom att använda matrisen:

$$F(\mathbf{w}) = F(\underline{\mathbf{e}}(1, 2, 3)^t) = \underline{\mathbf{e}}A(1, 2, 3)^t = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exempel 16.11. Antag att F är en linjär avbildning av rummet och att $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ är en bas i rummet. Bestäm matrisen för F i denna bas om

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dvs

$$\begin{cases} F(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ F(\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_3 \\ F(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) &= 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Bestäm också bilden $F(\mathbf{u})$ av vektorn $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Lösning: För att lösa ut de obekanta $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$, och $F(\mathbf{e}_3)$ ur ekvationssystemet utnyttjar vi att F är linjär. Vänstra ledet i systemet kan då skrivas

$$\begin{cases} F(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3) &= F(\mathbf{e}_1) + 3F(\mathbf{e}_2) + 4F(\mathbf{e}_3) \\ F(\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) &= F(\mathbf{e}_2) + 2F(\mathbf{e}_3) \\ F(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) &= F(\mathbf{e}_2) - F(\mathbf{e}_3) \end{cases}$$

Därmed kan det nya ekvationssystemet skrivas

$$\begin{cases} F(\mathbf{e}_1) + 3F(\mathbf{e}_2) + 4F(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ F(\mathbf{e}_2) + 2F(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_3 \\ F(\mathbf{e}_2) - F(\mathbf{e}_3) &= 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Utför vi radoperationer får vi att

$$\begin{cases} F(\mathbf{e}_1) + 3F(\mathbf{e}_2) + 4F(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ F(\mathbf{e}_2) + 2F(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_3 \\ -3F(\mathbf{e}_3) &= 3\mathbf{e}_1 \end{cases}$$

Ur rad 3 får vi att $F(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sätts detta in i rad 2 fås att $F(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Slutligen får vi ur rad 1 att $F(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Avbildningsmatrisen blir därmed

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidare gäller att

$$F(\mathbf{u}) = F \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \underline{\mathbf{e}} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

dvs, $F(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$.