

16. Linjära avbildningar

16.1. Linjär avbildning

Exempel 16.1. Betrakta funktionen $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, sådan att

$$f(x) = ax, \quad (16.2)$$

där a är en konstant. Då gäller att

1. $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.
2. $f(\lambda x) = a(\lambda x) = a\lambda x = \lambda(ax) = \lambda f(x)$, där $\lambda \in \mathbf{R}$.

Egenskaperna 1. och 2. ovan är här visat sig vara så pass viktiga att funktioner som uppfyller dessa har fått ett eget namn.

Definition 16.2. Vi säger att en funktion $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är **linjär** om för varje $x, y \in \mathbf{R}$ och tal λ gäller

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Alltså är $f(x) = ax$ en linjär funktion. Funktioner som inte är linjära kallar vi för **icke linjära** och de är många fler. T.ex., är de elementära funktionerna, dvs polynom, trigonometriska, exponential och logaritmfunktionerna icke linjära. Låt oss titta närmare på $f(x) = x^2$. Det gäller att

$$f(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = f(x) + f(y) + 2xy \neq f(x) + f(y),$$

dvs villkor 1. är inte uppfyllt och därmed är $f(x) = x^2$ inte linjär. Inte heller villkor 2. är uppfyllt, ty

$$f(\lambda x) = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2 = \lambda^2 f(x) \neq \lambda f(x).$$

Motsvarande linjära funktioner finns i Linjär algebra. Nedan ska vi se vilka dessa är och hur de verkar. Vi ska bl.a. visa att linjära funktioner i Linjär algebra är en generalisering av funktionen i (16.2) ovan till flera dimensioner. Det gäller faktiskt att

$$F(\underline{e}X) = \underline{e}AX,$$

där A är en matris.

Låt $\underline{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vara en bas i rummet och låt $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ vara bilden av $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

under matrisen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, dvs

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

eller kortare

$$Y = AX \quad (16.3)$$

Vi ser att sambandet i (16.3) är en **regel** som till varje vektor $\underline{e}X$ ordnar en entydig vektor $\underline{e}Y$ via

$$\underline{e}Y = \underline{e}AX. \quad (16.4)$$

Detta påminner om definitionen av begreppet **funktion**. Ett samband av typ (16.4) kallas därför en **linjär funktion** eller en **linjär avbildning** av rummet samt matrisen A för en **avbildningsmatris**.

Allmännare, låt $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ vara en bas i ett vektorrum V . Antag att $\mathbf{u} = \underline{e}X \in V$ och $\mathbf{v} = \underline{e}Y \in W$. Då är (16.4) ett enklare fall av sambandet:

$$\mathbf{v} = F(\mathbf{u}). \quad (16.5)$$

där F kallas en **avbildning** (eller funktion). Vi säger också att \mathbf{v} är **bilden** av \mathbf{u} under F och att \mathbf{u} är **urbilden** till \mathbf{v} . Ofta används beteckningen

$$F : V \rightarrow W$$

för att tala om att F är definierad på hela V samt har sina värden i W

Definition 16.3. Låt V, W vara vektorrum och $F : V \rightarrow W$ en avbildning från V till W . Vi säger att F är en linjär avbildning om

1. F är *additiv*:

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$$

2. F är *homogen*:

$$F(\lambda\mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u}), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Exempel 16.4. Rotation, spegling och projektion är några exempel på linjära avbildningar som vi kommer att studera närmare längre fram. \square

Exempel 16.5. Låt \mathbf{v} vara en fix vektor. Visa att avbildningen F given via

$$F(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}|\mathbf{v})$$

är linjär.

Lösning: 1. Vi visar först att F är additiv. Av egenskaperna för skalärprodukt följer att

$$F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = ((\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1|\mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2|\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2).$$

2. Vi visar nu att F är homogen:

$$F(\lambda\mathbf{u}) = (\lambda\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \lambda F(\mathbf{u}).$$

Alltså F är både additiv och homogen och därmed linjär. \square

Exempel 16.6. Låt $\underline{\mathbf{e}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ vara en bas i planet och låt $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ vara en godtycklig vektor i planet. Visa att avbildningen F är linjär om

$$F(\mathbf{u}) = F(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}.$$

Lösning: 1. Vi visar först att F är additiv. Låt $\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{e}_1 + b_1\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{u}_2 = a_2\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$. Då är

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (a_1 + a_2)\mathbf{e}_1 + (b_1 + b_2)\mathbf{e}_2.$$

Vi får att

$$F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = F((a_1 + a_2)\mathbf{e}_1 + (b_1 + b_2)\mathbf{e}_2) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2(a_1 + a_2) + 3(b_1 + b_2) \\ 4(a_1 + a_2) - 5(b_1 + b_2) \end{pmatrix}.$$

Av räkneregler för matriser följer nu att

$$F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2a_1 + 3b_1 \\ 4a_1 - 5b_1 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2a_2 + 3b_2 \\ 4a_2 - 5b_2 \end{pmatrix} = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2).$$

2. Vi visar nu att F är homogen. Om $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, så är $\lambda\mathbf{u} = \lambda x_1\mathbf{e}_1 + \lambda x_2\mathbf{e}_2$. Då är

$$F(\lambda\mathbf{u}) = F(\lambda x_1\mathbf{e}_1 + \lambda x_2\mathbf{e}_2) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2\lambda x_1 + 3\lambda x_2 \\ 4\lambda x_1 - 5\lambda x_2 \end{pmatrix} = \lambda \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 - 5x_2 \end{pmatrix} = \lambda F(\mathbf{u}).$$

Alltså är F linjär. \square

Exempel 16.7. Låt \mathbf{v} vara en fix vektor i rummet. Är avbildningen

$$F(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$$

linjär?

Lösning: Vi har att

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= ((\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \\ &= (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_2 \\ &= F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) + (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_2 \\ &\neq F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

Vidare gäller att

$$F(\lambda \mathbf{u}) = (\lambda \mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\lambda \mathbf{u}) = \lambda^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \lambda^2 F(\mathbf{u}) \neq \lambda F(\mathbf{u}).$$

Alltså är F en icke linjär avbildning på rummet. □

Exempel 16.8. Låt G vara en avbildning på rummet som i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ges av

$$G(\underline{\mathbf{e}}X) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 x_3 \\ x_2^2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}. \quad (16.6)$$

Undersök om G är linjär.

Lösning: Låt $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}X_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}X_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Vi behöver summan

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

och

$$\lambda \mathbf{u} = \lambda \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \end{pmatrix}.$$

Avbildningen G är inte linjär, ty

$$1. \quad G(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq G(\mathbf{u}) + G(\mathbf{v}) \quad 2. \quad G(\lambda \mathbf{u}) \neq \lambda G(\mathbf{u}).$$

T.ex., följer av (16.6) att

$$G(\lambda \mathbf{u}) = G\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \cdot \lambda c_1 \\ \lambda^2 b_1^2 \\ \lambda b_1 + \lambda c_1 \end{pmatrix} = \lambda \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \lambda a_1 c_1 \\ \lambda b_1^2 \\ b_1 + c_1 \end{pmatrix} \neq \lambda G(\mathbf{u}).$$

□

Exempel 16.9. Låt F vara en avbildning på rummet som i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ges av

$$F(\underline{\mathbf{e}}X) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_2 - 5x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{e}Y. \quad (16.7)$$

där $\underline{\mathbf{e}}Y$ är bildvektorn till Urbilden $\underline{\mathbf{e}}X$ under F .

1. Undersök om F är linjär.
2. Bestäm bilden av vektorerna \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 och \mathbf{e}_3 .
3. Bestäm bilden $F(\mathbf{u})$ om $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
4. Bestäm om möjligt Urbilden \mathbf{u} till bilden $F(\mathbf{u}) = 10\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_3$.

Lösning: 1. F är linjär om $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$ och $F(\lambda\mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u})$. Vi har att

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= F\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2(a_1 + a_2) + 3(b_1 + b_2) \\ 4(b_1 + b_2) - 5(c_1 + c_2) \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2a_1 + 3b_1 \\ 4b_1 - 5c_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2a_2 + 3b_2 \\ 4b_2 - 5c_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

och

$$F(\lambda\mathbf{u}) = F\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2\lambda a_1 + 3\lambda b_1 \\ 4\lambda b_1 - 5\lambda c_1 \\ \lambda b_1 \end{pmatrix} = \lambda \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2a_1 + 3b_1 \\ 4b_1 - 5c_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \lambda F(\mathbf{u}).$$

Alltså är F en linjär avbildning. Låt oss titta närmare på hur F verkar på en given vektor $\underline{\mathbf{e}}X$; och speciellt på koordinaterna X till vektorn. Vi har att

$$F(\underline{\mathbf{e}}X) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_2 - 5x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}AX.$$

Tydligt finns det till en linjär avbildning F en **avbildningsmatris** A så att bilden $\underline{\mathbf{e}}Y$ ges av

$$\underline{\mathbf{e}}Y = F(\underline{\mathbf{e}}X) = \underline{\mathbf{e}}AX.$$

2. Vi bestämmer bilden av basvektorerna, dvs $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$ och $F(\mathbf{e}_3)$. Vi får enligt (16.7) att

$$F(\mathbf{e}_1) = F\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(\mathbf{e}_2) = F\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 - 5 \cdot 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och

$$F(\mathbf{e}_3) = F\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0 - 5 \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa är kolonner i avbildningsmatrisen A till F :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ \underbrace{0}_{=F(\mathbf{e}_1)} & \underbrace{1}_{=F(\mathbf{e}_2)} & \underbrace{0}_{=F(\mathbf{e}_3)} \end{pmatrix}$$

3. a) Bilden $F(\mathbf{u})$ ges enligt (16.7) av

$$F(\mathbf{u}) = F\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Men bilden kan också tas fram med hjälp av bilden hos basvektorena

$$F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = F(\mathbf{e}_1) + F(\mathbf{e}_2) + F(\mathbf{e}_3) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) och kanske allra enklast med hjälp av avbildningsmatrisen A :

$$F\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Vi söker alltså en vektor $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}} X$ så att bilden är $F(\mathbf{u}) = 10\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_3$, dvs

$$\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = F(\underline{\mathbf{e}} X) = \underline{\mathbf{e}} A X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

dvs

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ekvationssystemet ovan löses med hjälp av Gausselemination eller genom att invertera matrisen A . Alltså är $F(\underline{\mathbf{e}}(-10, 10, 8)^t) = \underline{\mathbf{e}}(10, 0, 10)^t$. \square

Anmärkning 16.10. Vi har i exemplet ovan sett att till en linjär avbildning F hör en matris A , så att bilden av vektorn $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}} X$ är ges av

$$F(\underline{\mathbf{e}} X) = \underline{\mathbf{e}} A X.$$

Vi ska i nästa sats visa att detta gäller alltid om F är en linjär avbildning.