16. Linjära avbildningar

16.1. Linjär avbildning

Exempel 16.1. Betrakta funktionen $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, sådan att

$$f(x) = ax, \tag{16.2}$$

där a är en konstant. Då gäller att

1. $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.
2. $f(\lambda x) = a(\lambda x) = a\lambda x = \lambda(ax) = \lambda f(x)$, där $\lambda \in \mathbf{R}$.

Egenskaperna 1. och 2. ovan är har visat sig vara så pass viktiga att funktioner som uppfyller dessa har fått ett eget namn.

Definition 16.2. Vi säger att en funktion $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ är **linjär** om för varje $x, y \in \mathbf{R}$ och tal λ gäller

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Alltså är $f(x) = ax$ en linjär funktion. Funktioner som inte är linjära kallar vi för **icke linjära** och de är många fler. T.ex., är de elemntära funktionerna, dvs polynom, trigonometriska, exponential och logaritmfunktioner icke linjära. Låt oss titta närmare på $f(x) = x^2$. Det gäller att

$$f(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = f(x) + f(y) + 2xy \neq f(x) + f(y),$$

dvs villkor 1. är inte uppfyllt och därmed är $f(x) = x^2$ inte linjär. Inte heller villkor 2. är uppfyllt, ty

$$f(\lambda x) = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2 = \lambda^2 f(x) \neq \lambda f(x).$$

Motsvarande linjära funktioner finns i Linjär algebra. Nedan ska vi se vilka dessa är och hur de fungerar. Vi ska bl.a. visa att linjära funktioner i Linjär algebra är en generalisering av funktionen i (23.1) ovan till flera dimensioner. Det gäller faktiskt att

$$F(\underline{\mathbf{e}}X) = \underline{\mathbf{e}}AX,$$

där A är en matris.

Låt $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ vara en bas i rummet och låt $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ vara bilden av $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ under matrisen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, dvs

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

eller kortare

$$Y = AX \tag{16.3}$$

Vi ser att sambandet i (16.3) är en **regel** som till varje vektor $\underline{\boldsymbol{e}}X$ ordnar en entydig vektor $\underline{\boldsymbol{e}}Y$ via

$$\underline{\boldsymbol{e}}Y = \underline{\boldsymbol{e}}AX. \tag{16.4}$$

Detta påminner om definitionen av en **funktion**. Ett samband av typ (16.4) kallas därför en **linjär funktion** eller en **linjär avbildning** av rummet samt matrisen A för en **avbildningsmatris**.

Allmännare, låt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ vara en bas i ett vektorrum V. Antag att $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X \in V$ och $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}Y \in W$. Då är (16.4) ett enklare fall av sambandet:

$$\boldsymbol{v} = F(\boldsymbol{u}). \tag{16.5}$$

där F kallas en **avbildning** (eller funktion). Vi säger också att $\boldsymbol{v}$ är *bilden av* $\boldsymbol{u}$ *under* F och att $\boldsymbol{u}$ är *urbilden till* $\boldsymbol{v}$. Ofta används beteckningen

$$F: \; V \to W$$

för att tala om att F är definierad på hela V samt har sina värden i W

Definition 16.3. Låt V, W vara vektorrum och $F: \; V \to W$ en avbildning från V till W. Vi säger att F är en linjär avbildning om

1. $F(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{u}) + F(\boldsymbol{v})$, (*additiv*)
2. $F(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda F(\boldsymbol{u})$, $\lambda \in \mathbf{R}$, (*homogen*)

Exempel 16.4. Rotation, **spegling** och **projektion** är några exempel på linjära avbildningar som vi kommer att studera i det här avsnittet.

Exempel 16.5. Låt $\boldsymbol{v}$ vara en fix vektor i rummet. Är avbildningen

$$F(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}$$

linjär?

Lösning: Vi har att

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) &= ((\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \times \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \\
&= (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}_2 + (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}_2 \\
&= F(\boldsymbol{u}_1) + F(\boldsymbol{u}_2) + (\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}_2 \\
&\neq F(\boldsymbol{u}_1) + F(\boldsymbol{u}_2).
\end{aligned}$$

Vidare gäller att

$$F(\boldsymbol{u}) = (\lambda\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot (\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda^2(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} = \lambda^2 F(\boldsymbol{u}) \neq \lambda F(\boldsymbol{u}).$$

Alltså är F en icke linjär avbildning på rummet. $\square$

Exempel 16.6. Låt G vara en avbildning på rummet som i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ ges av

$$G(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} x_1x_3 \\ x_2^2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}. \tag{16.6}$$

Undersök om G är linjär.

Lösning: Låt $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\,X_1 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}\,X_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Vi behöver summan

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

och

$$\lambda\boldsymbol{u} = \lambda\,\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \end{pmatrix}.$$

Avbildningen G är inte linjär, ty

1. $G(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \neq G(\boldsymbol{u}) + G(\boldsymbol{v})$
2. $G(\lambda\boldsymbol{u}) \neq \lambda G(\boldsymbol{u})$.

T.ex., följer av (16.6) att

$$G(\lambda\boldsymbol{u}) = G\left(\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \cdot \lambda c_1 \\ \lambda^2 b_1^2 \\ \lambda b_1 + \lambda c_1 \end{pmatrix} = \lambda\,\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} \lambda a_1 c_1 \\ \lambda b_1^2 \\ b_1 + c_1 \end{pmatrix} \neq \lambda G(\boldsymbol{u}).$$

$\square$

Exempel 16.7. Låt F vara en avbildning på rummet som i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ ges av

$$F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_2 - 5x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}Y. \tag{16.7}$$

där $\underline{\boldsymbol{e}}\,Y$ är bildvektorn av urbilden $\underline{\boldsymbol{e}}\,X$ under F.

1. Undersök om F är linjär.
2. Bestäm bilden av vektorerna $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$.
3. Bestäm bilden $F(\boldsymbol{u})$ om $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.
4. Bestäm om möjligt urbilden $\boldsymbol{u}$ om $F(\boldsymbol{u}) = 10\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_3$.

Lösning: 1. F är linjär om $F(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{u}) + F(\boldsymbol{v})$ och $F(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda F(\boldsymbol{u})$. Vi har att

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= F\left(\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}\right) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2(a_1 + a_2) + 3(b_1 + b_2) \\ 4(b_1 + b_2) - 5(c_1 + c_2) \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2a_1 + 3b_1 \\ 4b_1 - 5c_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2a_2 + 3b_2 \\ 4b_2 - 5c_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = F(\boldsymbol{u}) + F(\boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

och

$$F(\lambda\boldsymbol{u}) = F\left(\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2\lambda a_1 + 3\lambda b_1 \\ 4\lambda b_1 - 5\lambda c_1 \\ \lambda b_1 \end{pmatrix} = \lambda\,\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2a_1 + 3b_1 \\ 4b_1 - 5c_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \lambda F(\boldsymbol{u}).$$

Alltså är F linjär avbildning. Låt oss titta närmare på hur F verkar på en given vektor $\underline{\boldsymbol{e}}X$; speciellt på koordinaterna X till vektorn. Vi har att

$$F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_2 - 5x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}AX.$$

Tydligen finns det till en linjär avbildning F en **avbildningsmatris** A så att bilden $\underline{\boldsymbol{e}}Y$ ges av

$$\underline{\boldsymbol{e}}Y = F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}}AX.$$

2. Vi bestämmer bilden av basvektorerna, dvs $F(\boldsymbol{e}_1)$, $F(\boldsymbol{e}_2)$ och $F(\boldsymbol{e}_3)$. Vi får enligt (16.7) att

$$F(\boldsymbol{e}_1) = F\left(\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(\boldsymbol{e}_2) = F\left(\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}2\cdot 0+3\cdot 1\\4\cdot 1-5\cdot 0\\1\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$$

och

$$F(\boldsymbol{e}_3) = F\left(\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}2\cdot 0+3\cdot 0\\4\cdot 0-5\cdot 1\\0\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}.$$

Dessa är kolonner i avbildningsmatrisen A till F:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0\\ 0 & 4 & -5\\ \underbrace{0}_{=F(\boldsymbol{e}_1)} & \underbrace{1}_{=F(\boldsymbol{e}_2)} & \underbrace{0}_{=F(\boldsymbol{e}_3)}\end{pmatrix}$$

3. a) Bilden $F(\boldsymbol{u})$ ges enligt (16.7) av

$$F(\boldsymbol{u}) = F\left(\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

b) Men bilden kan också tas fram med hjälp av bilden hos basvektorerna

$$F(\boldsymbol{u}) = F(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3) = F(\boldsymbol{e}_1)+F(\boldsymbol{e}_2)+F(\boldsymbol{e}_3) = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

c) och kanske allra enklast med hjälp av avbildningsmatrisen A:

$$F\left(\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \underline{\boldsymbol{e}}A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}2&3&0\\0&4&-5\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

4. Vi söker alltså en vektor $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\,X$ så att bilden är $F(\boldsymbol{u}) = 10\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_3$, dvs

$$\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}10\\0\\10\end{pmatrix} = F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}}AX = \begin{pmatrix}2&3&0\\0&4&-5\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

dvs

$$\begin{pmatrix}2&3&0\\0&4&-5\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\0\\10\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\10\\8\end{pmatrix}.$$

Alltså är $F(\underline{\boldsymbol{e}}(-10,10,8)^t) = \underline{\boldsymbol{e}}(10,0,10)^t$. □

Anmärkning 16.8. Vi har i exemplet ovan sett att till en linjär avbildning F hör en matris A, så att bilden av vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\,X$ är ges av

$$F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}}AX.$$

Vi ska i nästa sats visa att detta gäller alltid om F är en linjär avbildning.