16.7. Nollrum, värderum och dimensionssatsen

Definition 16.33. Låt $F : V \to W$ vara en linjär avbildning.

1. **Nollrummet** till F definierar vi som mängden av alla $\boldsymbol{u} \in V$, vilkas bild är nollvektorn, dvs $F(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$. Nollrummet betecknas med $N(F)$.
2. **Värderummet** till F definierar vi som mängden av alla bilder $\boldsymbol{v} \in W$, dvs $\boldsymbol{v} = F(\boldsymbol{u})$ för något $\boldsymbol{u} \in V$. Värderummet betecknas med $V(F)$.

Exempel 16.34. a) I Exempel 16.12 hade vi en ortogonal projektion $P : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ på planet $2x - y - 2z = 0$. Vi såg då att inga andra vektorer än dem som är parallella med normalen, $\lambda\boldsymbol{n}$ avbildas på nollvektorn, dvs $P(\lambda\boldsymbol{n}) = \lambda P(\boldsymbol{n}) = \mathbf{0}$. Alltså är

$$N(P) = \{\lambda\boldsymbol{n};\ \lambda \in \mathbf{R}\} = [\boldsymbol{n}] \quad \text{och} \quad \dim N(P) = 1.$$

Vidare gäller att eftersom alla projektioner ligger i planet, så är

$$V(P) = \{\boldsymbol{v} = P(\boldsymbol{u}) :\ \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3\} = \text{mängden av bilder under } P = \text{planet} \quad \text{och} \quad \dim V(P) = 2.$$

b) I Exempel 16.14 hade vi en spegling $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ i planet. I det här fallet fanns det inga vektorer som avbildades på nollvektorn. Självklart avbildas alltid nollvektorn på sig själv. Alltså är

$$N(S) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{och} \quad \dim N(S) = 0.$$

Eftersom varje vektor i rummet $\boldsymbol{v}$ är en spegelbild av något $\boldsymbol{u}$, dvs $\boldsymbol{v} = S(\boldsymbol{u})$, för något $\boldsymbol{u}$, så gäller att

$$V(S) = \mathbf{R}^3 \quad \text{och} \quad \dim V(S) = 3.$$

c) I Exempel 16.25 hade vi rotation R moturs en vinkel θ kring en axel parallell med $\boldsymbol{e}_3$. Eftersom ingen annan vektor än nollvektorn vrids på nollvektorn, så har vi att

$$N(R) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{och} \quad \dim N(R) = 0.$$

Varje vektor i rummet är en vektor vriden moturs vinkeln θ, kan man få urbilden genom att vridning samma vinkel medurs. Alltså följer att

$$V(R) = \mathbf{R}^3 \quad \text{och} \quad \dim V(R) = 3.$$

Exempel 16.35. Låt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ vara en ON-bas i rummet och låt F vara en linjär avbildning med avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visa att vektorn

1. $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \in N(F)$.
2. $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \in V(F)$.

Lösning: 1. Vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}(2, -1, -1)^t \in N(F)$, ty

$$F(\boldsymbol{u}) = F(\underline{\boldsymbol{e}}(2, -1, -1)^t) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Alltså, vektorn $\boldsymbol{u}$ ligger i $N(F)$.

2. Vektorn $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}(2, -1, 2)^t \in V(F)$ om det finns en vektor $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X$, sådan att

$$F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}.$$

Nu gäller det att

$$F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{e}}AX = \underline{\boldsymbol{e}}(2, -1, 2)^t \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}(3, -1, 0)^t$. Detta visar att $\boldsymbol{v} \in V(F)$.

Exempel 16.36. Låt avbildningen F och matrisen A vara som i Exempel 16.35. Vi har sett att vektorn $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \in N(F)$ och $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \in V(F)$. Frågor som vi ska besvara i det här exemplet är

1. Finns det fler vektorer än $\boldsymbol{u}$ i $N(F)$? Kan vi bestämma $N(F)$?

2. Hur ser $V(F)$ ut? Vad beskriver det geometriskt och vad är dess dimension?

Lösning: 1. Nollrummet $N(F)$ består av alla vektorer $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X$ som under F avbildas på nollvektorn, dvs

$$F(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{e}}AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow AX = \mathbf{0}.$$

Löser vi ekvationssystemet får vi

$$AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow X = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser alltså att $N(F)$ spänns upp av endast vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}(2, -1, -1)^t$. Detta betyder att $\dim N(F) = 1$ och att $N(F)$ är en rät linje genom origo, se Figur 16.37.

2. Vi har definierat $V(F)$ som mängden av alla bilder $\boldsymbol{v}$ under F, dvs mängden av alla $\boldsymbol{v}$ för vilka det finns en urbild $\boldsymbol{u}$, dvs om $F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$. Om urbilden är $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ och bilden är $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}Y$, så gäller att

$$\boldsymbol{v} = F(\boldsymbol{u}) \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = F(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = x_1F(\boldsymbol{e}_1) + x_2F(\boldsymbol{e}_2) + x_3F(\boldsymbol{e}_3). \quad (16.11)$$

Vi ser att bildvektorn $\boldsymbol{v} \in V(F)$ är en linjärkombination av bilden av basvektorerna $F(\boldsymbol{e}_1)$, $F(\boldsymbol{e}_2)$ och $F(\boldsymbol{e}_3)$. Eftersom vektorn $\boldsymbol{v}$ är godtycklig i $V(F)$ följer att

$$V(F) = [F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), F(\boldsymbol{e}_3)].$$

Låt oss undersöka om vektorerna är linjärt beroende eller inte. Det gäller att

$$\lambda_1F(\boldsymbol{e}_1) + \lambda_2F(\boldsymbol{e}_2) + \lambda_3F(\boldsymbol{e}_3) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Lösningen till detta system är således $\lambda_1 = 2t$, $\lambda_2 = -t$ och $\lambda_3 = -t$. Vi har alltså

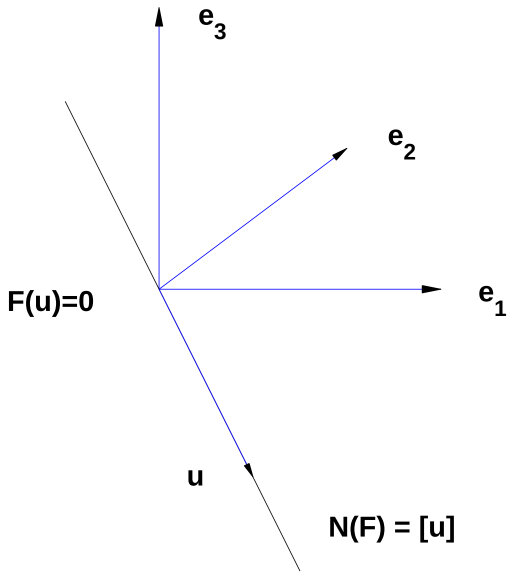
$$2tF(\boldsymbol{e}_1) - tF(\boldsymbol{e}_1) - tF(\boldsymbol{e}_1) = \mathbf{0} \Leftrightarrow F(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{2}(F(\boldsymbol{e}_2) + F(\boldsymbol{e}_3)).$$

Vi ser nu att $\dim V(F) = 2$ och underummet $V(F) = [F(\boldsymbol{e}_2), F(\boldsymbol{e}_3)]$ är ett plan genom origo, se Figur 16.38. En normal till detta plan är t.ex.

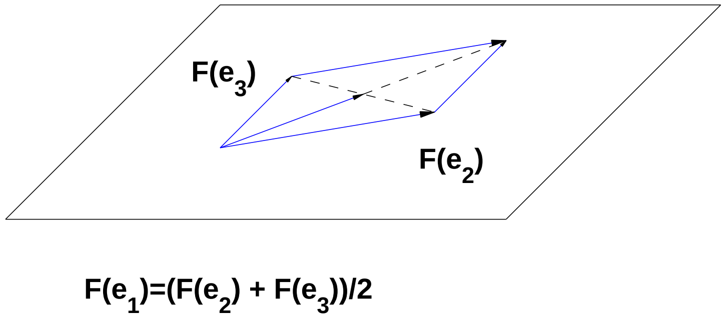
$$F(\boldsymbol{e}_2) \times F(\boldsymbol{e}_3) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Geometriskt är underrummet $V(F) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 : \; x_1 - x_3 = 0\}$, se Figur 16.39.

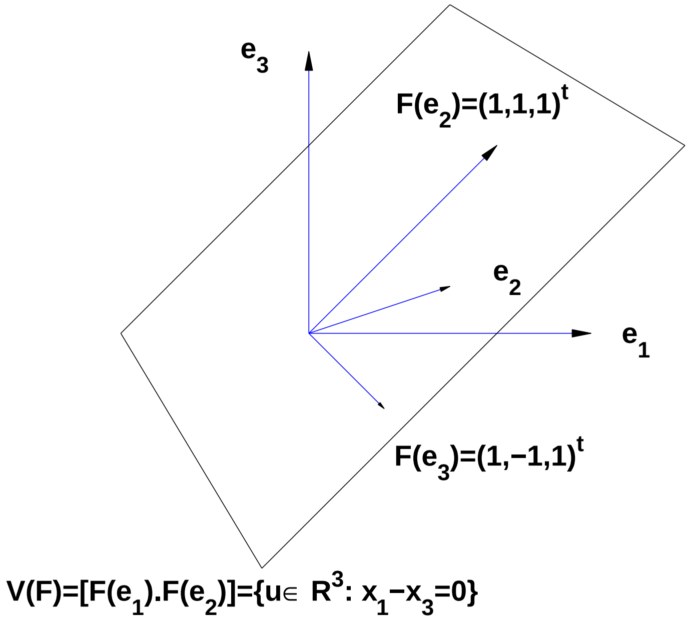
Figur 16.37.



Figur 16.38.



Figur 16.39.



Vi såg i uttrycket (16.11) i exemplet ovan att varje bildvektor i värderummet till en linjär avbildning är en linjärkombination av bilden av basvektorerna. Detta är bl.a. innebörden av nästa sats.

Sats 16.40. Antag att $F: V \to W$ är linjär.

1. Nollrummet $N(F)$ är ett underrum av V.
2. Värderummet $V(F)$ är ett underrum av W.
3. Om $V = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n]$ så $V(F) = [F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), \dots, F(\boldsymbol{e}_n)]$.

Bevis: 1. Låt $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in N(F) \subseteq V$, dvs $F(\boldsymbol{u}_1) = F(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{0}$. Då gäller att

$$F(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = F(\boldsymbol{u}_1) + F(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{0}$$

och

$$F(\lambda \boldsymbol{u}_1) = \lambda F(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{0},$$

dvs $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in N(F)$ och $\lambda \boldsymbol{u}_1 \in N(F)$. Därmed är $N(F)$ är ett underrum i V.

2. Om $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V(F) \subseteq W$, så finns det $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in V$, så att $\boldsymbol{v}_1 = F(\boldsymbol{u}_1)$ respektive $\boldsymbol{v}_2 = F(\boldsymbol{u}_2)$. Det följer att

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = F(\boldsymbol{u}_1) + F(\boldsymbol{u}_2) = F(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2),$$

dvs $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V(F)$ samt att

$$\lambda \boldsymbol{v}_1 = \lambda F(\boldsymbol{u}_1) = F(\lambda \boldsymbol{u}_1),$$

dvs $\lambda \boldsymbol{v}_1$ har urbilden $\lambda \boldsymbol{u}_1$, dvs $\lambda \boldsymbol{v}_1 \in V(F)$. Vi har därmed visat att $V(F)$ är ett underrum i W.

3. Låt $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ vara en godtycklig vektor i V med bilden $\boldsymbol{v}$ under F, dvs $F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$. Då gäller att

$$\boldsymbol{v} = F(\boldsymbol{u}) = F(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1F(\boldsymbol{e}_1) + x_2F(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_nF(\boldsymbol{e}_n),$$

dvs varje $\boldsymbol{v} \in V(F)$ är en linjärkombination av mängden $\{F(\boldsymbol{e}_1), \dots, F(\boldsymbol{e}_n)\}$. Vi har alltså visat att $V(F) = [F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), \dots, F(\boldsymbol{e}_n)]$.

Vi har i exemplen ovan också sett att det finns ett samband mellan $\dim N(F)$ och $\dim V(F)$ och nästa sats bekräftar detta.

Sats 16.41. Dimensionssatsen: Antag att $F:\ V \to W$ är linjär. Då gäller att

$$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim V.$$

Bevis: Antag att $\dim V = n$ och att $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ är en bas i V. Antag också att $\dim N(F) = k$ och att $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ är en bas i $N(F)$. Vi vill visa att

$$\dim V(F) = \dim V - \dim N(F).$$

Enligt Sats 16.40, så gäller att

$$V(F) = [F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), \ldots, F(\boldsymbol{e}_n)].$$

Eftersom

$$F(\boldsymbol{e}_1) = F(\boldsymbol{e}_2) = \cdots = F(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{0},$$

följer att

$$V(F) = [F(\boldsymbol{e}_{k+1}), F(\boldsymbol{e}_{k+2}), \ldots, F(\boldsymbol{e}_n)]. \tag{16.12}$$

Vi visar nu att mängden i (16.12) som spänner upp $V(F)$ är linjärt oberoende, ty

$$\lambda_{k+1}F(\boldsymbol{e}_{k+1})+\lambda_{k+2}F(\boldsymbol{e}_{k+2})+\cdots+\lambda_n F(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow F(\lambda_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1}+\lambda_{k+2}\boldsymbol{e}_{k+2}+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{0},$$

dvs $\boldsymbol{e}_{k+1}, \boldsymbol{e}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in N(F)$, vilket är en motsägelse. Mängden av $(n-k)$ vektorer $\{F(\boldsymbol{e}_{k+1}), F(\boldsymbol{e}_{k+2}), \ldots, F(\boldsymbol{e}_n)\}$ i (16.12) som spänner upp $V(F)$ är alltså linjärt oberoende. Därmed är

$$\dim V(F) = n - k = \dim V - \dim N(F),$$

dvs

$$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim V.$$

Exempel 16.42. Den linjära avbildningen F har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en bas för underrummen $N(F)$, $V(F)$ och $N(F) \cap V(F)$. Avgör också om $(1,4,2)^t \in V(F)$?

Lösning: 1. Nollrummet $N(F)$ är alla $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X$ som under F avbildas på nollvektorn, dvs

$$F(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{e}}AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow AX = \mathbf{0}.$$

Vi löser ekvationssystemet

$$AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow X = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså spänns $N(F)$ endast upp av vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\mathbf{e}}(1,1,0)^t$, dvs $N(F) = [(1,1,0)^t]$ är en rät linje geonm origo med $\dim N(F) = 1$. 2. Dimensionsatsen

$$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim \mathbf{R}^3$$

ger att $\dim V(F) = 2$. Eftersom $V(F)$ spänns upp av bilden av basvektorerna,

$$V(F) = [F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), F(\boldsymbol{e}_3)]$$

måste en bildvektor bort då den är linjärkombination i de övriga. Det får bli $F(\boldsymbol{e}_2)$ som är parallell med $F(\boldsymbol{e}_1)$. Alltså har vi att

$$V(F) = [F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_3)] = [(1,1,0)^t, (1,1,1)^t]$$

som är ett plan genom origo. Normalen till $V(F)$ ges av $(1,1,0)^t \times (1,1,1)^t = (1,-1,0)^t$, så att

$$V(F) = [(1,1,0)^t, (1,1,1)^t] = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 : \ x_1 - x_2 = 0\}.$$

3. Snittmängden $N(F) \cap V(F)$ består av alla vektorer som ligger i både $N(F)$ och $V(F)$. Eftersom $N(F) = [(1,1,0)^t]$ och $(1,1,0)^t \in V(F)$, så är $N(F) \cap V(F) = [(1,1,0)^t]$.

4. Vektorn $(1,4,2)^t \notin V(F)$ ty den satisfierar inte ekvationen $x_1 - x_2 = 0$.