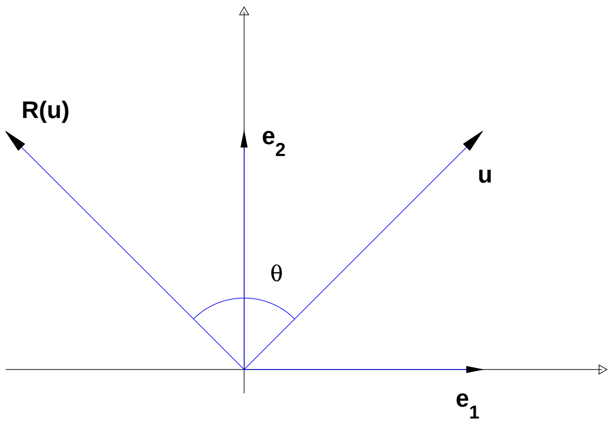
16.4. Plan rotation

Exempel 16.23. Låt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ vara en ON-bas i planet och låt $\boldsymbol{u}$ vara en godtycklig vektor med koordinaterna $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, dvs $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}X$.

Problem: Vi vill vrida moturs vektorn $\boldsymbol{u}$ en vinkel θ.

Figur 16.24.

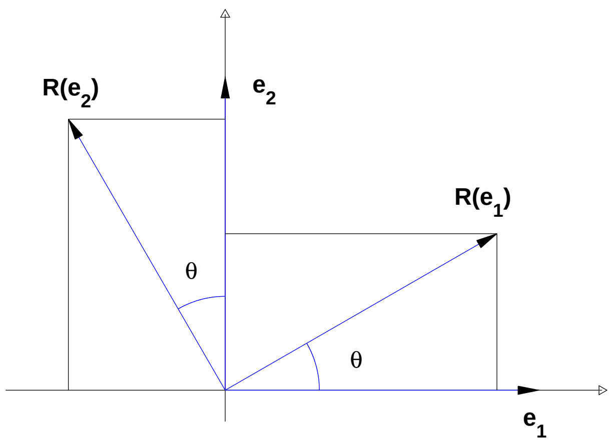


Om vi kallar R den linjära avbildning som moturs vrider alla vektorer i planet vinkeln θ, så söker vi alltså $R(\boldsymbol{u})$. Eftersom R är linjär, så gäller som bekant

$$R(\boldsymbol{u}) = R(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1R(\boldsymbol{e}_1) + x_2R(\boldsymbol{e}_2) = (R(\boldsymbol{e}_1), R(\boldsymbol{e}_2)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}AX.$$

Detta betyder att det räcker att känna till bilden av basvektorerna, dvs hur $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ vrids.

Figur 16.25.



Enligt definitionen av cosinus och sinus får vi att bilden av basvektorerna ges av

$$\begin{cases} R(\boldsymbol{e}_1) &= \cos\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_2 \\ R(\boldsymbol{e}_2) &= -\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_2 \end{cases} \tag{16.8}$$

och därmed blir avbildningsmatrisen $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. □

Exempel 16.26. Vi ser enligt Exempel 16.23 att avbildningen R med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{16.9}$$

vrider alla vektorer i planet moturs vinkeln θ. T.ex om $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, dvs

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

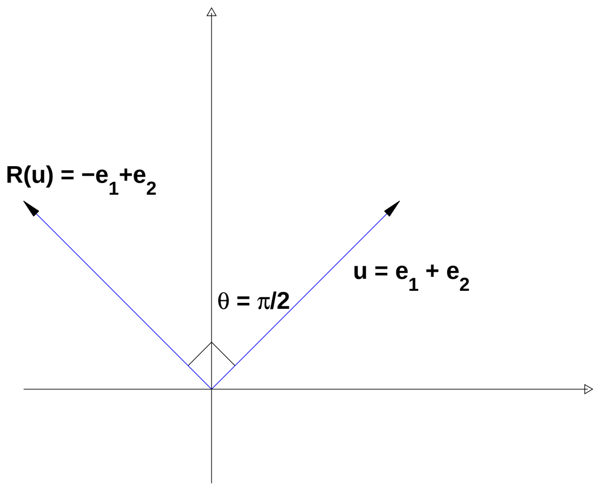
så roteras vektorn

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

till

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{u}) &= R(\underline{\boldsymbol{e}}(1,1)^t) = \underline{\boldsymbol{e}} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

Figur 16.27.



Vi ser att matrisen för rotation i (16.9) är inte symmetrisk som matriserna för projektion resp. spegling. Däremot har den andra egenskaper som de andra saknar. Enligt Definition 6.36 så är matrisen A för en rotation i (16.9) **ortogonal**, ty

$$A^t A = E.$$

□