16.3. Projektion och Spegling

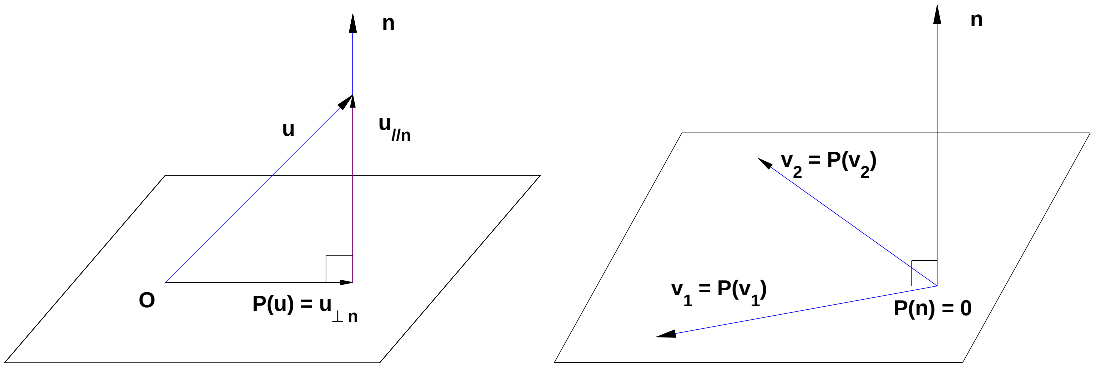
Exempel 16.12. Bestäm matrisen för projektionen P av rummet vinkelrät mot planet

$$2x - y - 2z = 0.$$

Bestäm också bilden av vektorerna $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ och $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$. (ON-bas).

Lösning: a) Använd **projektionsformeln** b) Utnyttja att P är **linjär**

Figur 16.13.



a) Projektionsformeln ger

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\perp\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{u}_{\parallel\boldsymbol{n}} \quad \text{där} \quad \boldsymbol{u}_{\parallel\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n} \quad \text{och} \quad P(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\perp\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n}.$$

Matrisen A för projektionen P innehåller i sina kolonner bilden av basvektorerna. Men vi väljer att bestämma bilden av en godtycklig vektor $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\parallel\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \frac{\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}} \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \frac{2a-b-2c}{9}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 4a-2b-4c \\ -2a+b+2c \\ -4a+2b+4c \end{pmatrix} \\
&= \underline{\boldsymbol{e}}\frac{1}{9}\left\{\begin{pmatrix} 9a \\ 9b \\ 9c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a-2b-4c \\ -2a+b+2c \\ -4a+2b+4c \end{pmatrix}\right\} = \underline{\boldsymbol{e}}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5a+2b+4c \\ 2a+8b-2c \\ 4a-2b+5c \end{pmatrix} \\
&= \underline{\boldsymbol{e}}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Alltså har P matrisen $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

b) P är linjär. Låt $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ vara två vektorer i planet. Då kommer normalen $\boldsymbol{n}$ att avbildas på $\boldsymbol{0}$ och $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ avbildas på sig själva eftersom dessa redan ligger i planet. Vi har alltså att

$$\begin{cases} P(\boldsymbol{n}) & = & \boldsymbol{0} \\ P(\boldsymbol{v}_1) & = & \boldsymbol{v}_1 \\ P(\boldsymbol{v}_2) & = & \boldsymbol{v}_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3) & = & 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ P(2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) & = & 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ P(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) & = & \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

Eftersom P är linjär så får vi systemet

$$\begin{cases} 2P(\boldsymbol{e}_1) - P(\boldsymbol{e}_2) - 2P(\boldsymbol{e}_3) = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ 2P(\boldsymbol{e}_1) + 2P(\boldsymbol{e}_2) + P(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ P(\boldsymbol{e}_1) - 2P(\boldsymbol{e}_2) + 2P(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

Löser vi systemt för de obekanta $P(\boldsymbol{e}_1)$, $P(\boldsymbol{e}_2)$ och $P(\boldsymbol{e}_3)$ som i i Exempel 16.11 får vi att

$$\begin{cases} P(\boldsymbol{e}_1) & = & (5\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3)/9 \\ P(\boldsymbol{e}_2) & = & (2\boldsymbol{e}_1 + 8\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3)/9 \\ P(\boldsymbol{e}_3) & = & (4\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3)/9 \end{cases}$$

som ger matrisen A igen.

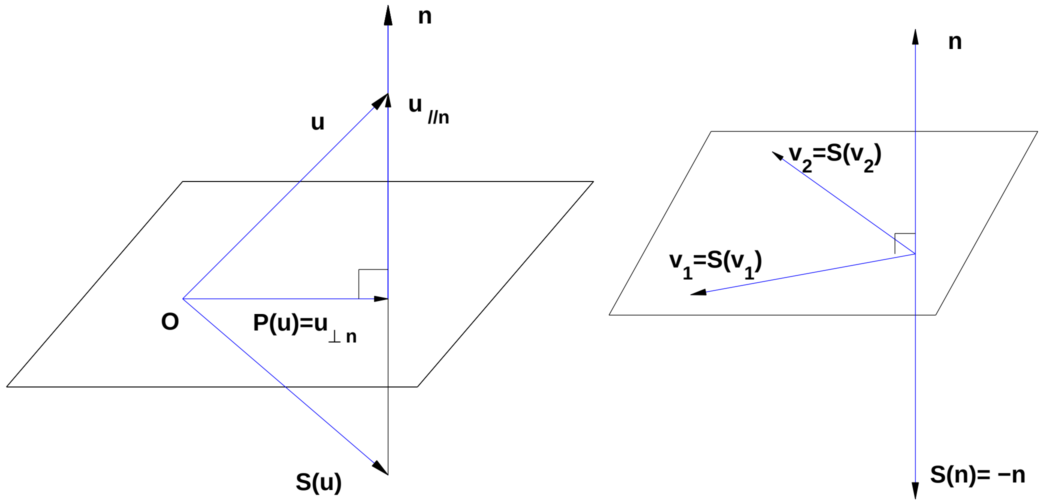
Vi projicerar nu vektorn $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$ och får bilden

$$P(\boldsymbol{w}) = P\left(\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Exempel 16.14. Ange matrisen för speglingen S i planet $2x - y - 2z = 0$. (ON-bas).

Lösning: a) **Projektionsformeln** b) S är **linjär:**

Figur 16.15.



a) Låt $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vara en godtycklig vektor i rummet. Då gäller att

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{u}_{\|\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{u} - 2\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - 2\frac{2a-b-2c}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8a-4b-8c \\ -4a+2b+4c \\ -8a+4b+8c \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} a+4b+8c \\ 4a+7b-4c \\ 8a-4b-c \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alltså ges avbildningsmatrisen för speglingen S av $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Idén här är att utnyttja egenskapen hos S, dvs normalen $\boldsymbol{n}$ avbildas på $-\boldsymbol{n}$ samt två godtyckligt linjärt oberoende vektorer i planet t.ex. tar vi $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ och $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ avbildas på sig själva. Detta ger att

$$\left\{\begin{array}{rcl} S(\boldsymbol{n}) &=& -\boldsymbol{n} \\ S(\boldsymbol{v}_1) &=& \boldsymbol{v}_1 \\ S(\boldsymbol{v}_2) &=& \boldsymbol{v}_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} S(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3) &=& -2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \\ S(2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) &=& 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ S(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) &=& \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{array}\right.$$

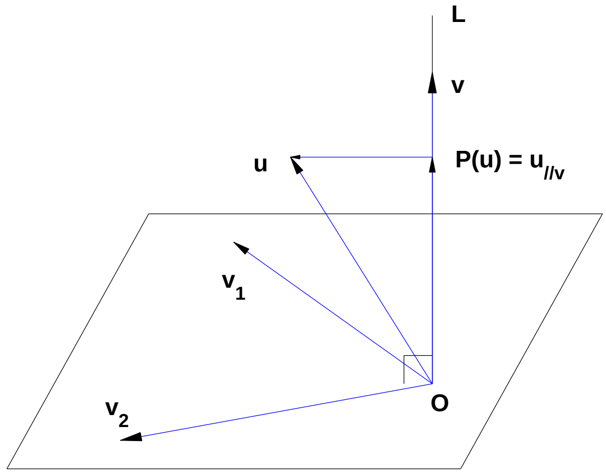
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} S(\boldsymbol{e}_1) &=& \frac{1}{9}(\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + 8\boldsymbol{e}_3) \\ S(\boldsymbol{e}_2) &=& \frac{1}{9}(4\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_3) \\ S(\boldsymbol{e}_3) &=& \frac{1}{9}(8\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \end{array}\right.$$

vilket ger samma avbildningsmatris A som ovan. Systemet ovan löses p.s.s i Exempel 16.11.

Exempel 16.16. Bestäm matrisen för projektionen av rummet vinkelrät mot den räta linjen $(x, y, z) = t(1, 2, -2)^t$ (ON-bas).

Lösning: a) **Projektionsformeln** b) P är **linjär**

Figur 16.17.



Låt $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ vara riktningsvektorn hos linjen och låt $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vara en godtycklig vektor. Projektionsformeln ger:

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{u}_{\|\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{a+2b-2c}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} a+2b-2c \\ 2a+4b-4c \\ -2a-4b+4c \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alltså ges avbildningsmatrisen till projektionen P av $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

b) P porjicerar riktningsvektorn $\boldsymbol{v}$ på sig själv, samt två godtyckligt linjärt oberoende vektorer, ortogonala mot $\boldsymbol{v}$, t.ex. $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ och $\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$ projiceras på nollvektorn $\mathbf{0}$. Detta ger att

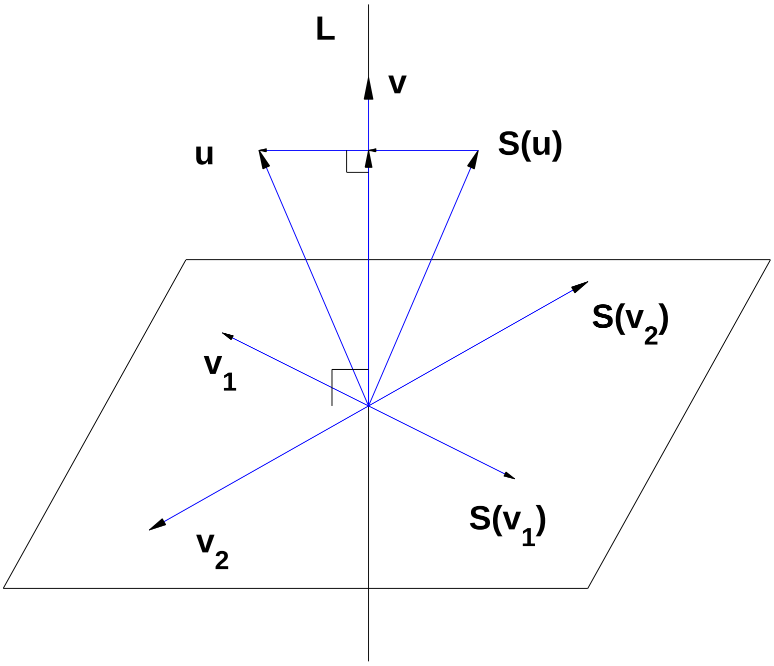
$$\left\{\begin{array}{rcl} P(\boldsymbol{v}) &=& \boldsymbol{v} \\ P(\boldsymbol{v}_1) &=& \mathbf{0} \\ P(\boldsymbol{v}_2) &=& \mathbf{0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} P(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3) &=& \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 \\ P(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) &=& \mathbf{0} \\ P(2\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3) &=& \mathbf{0} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} P(\boldsymbol{e}_1) &=& (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3)/9 \\ P(\boldsymbol{e}_2) &=& (2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_3)/9 \\ P(\boldsymbol{e}_3) &=& (-2\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3)/9 \end{array}\right.$$

Exempel 16.18. Bestäm matrisen för en spegling av rummet i den räta linjen $(x, y, z) = t(1, 2, -2)^t$. Bestäm också bilden av vektorn $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$. (ON-bas).

Lösning:

Figur 16.19.



a) Eftersom spegelbilden uppfyller

$$S(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{u}_{\perp \boldsymbol{v}}$$

så ges avbildningsmatrisen av $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Alternativt kan vi lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} S(\boldsymbol{v}) & = & \boldsymbol{v} \\ S(\boldsymbol{v}_1) & = & -\boldsymbol{v}_1 \\ S(\boldsymbol{v}_2) & = & -\boldsymbol{v}_2 \end{cases}$$

där vektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ kan vara som i Exempel 16.16.

Vidare gäller att

$$S(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{9}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} -11 \\ -22 \\ -23 \end{pmatrix} = -\frac{11}{9}\boldsymbol{e}_1 - \frac{22}{9}\boldsymbol{e}_2 - \frac{23}{9}\boldsymbol{e}_3.$$