21.4. System av högre ordning

Vi har i tidigare avsnitt studerat linjära system av första ordningens differentialekvationer. Teorin vi härledde där kan faktiskt utan större bekymmer komma att gälla även linjära system av högre ordningens differentialekvationer. Vi ska nedan beskriva kort t.ex. hur svängningsproblem som beskrivs av andra ordnings linjära system kan lösas.

Exempel 21.7. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}''(t) + A\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}_0 \\ \boldsymbol{y}'(0) &= \boldsymbol{y}_1 \end{cases} \tag{21.14}$$

där A är en $n\times n$ positiv matris. Sådana matriser är diagonaliserbara med positiva egenvärden $\lambda_j^2 > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Detta betyder att vi kan skriva diagonalmatrisen på formen D^2 och därmed gäller att $A = TD^2T^{-1}$. Sätter vi $\boldsymbol{z}(t) = T^{-1}\boldsymbol{y}(t)$ kan ekvationen skrivas på formen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}''(t) + A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y}''(t) + TD^2T^{-1}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow T^{-1}\boldsymbol{y}''(t) + D^2T^{-1}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{z}''(t) + D^2\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Komponentvis betyder detta att

$$z_j''(t) + \lambda_j^2 z(t) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

med lösningen

$$z_j(t) = \alpha_j \cos \lambda_j t + \beta_j \sin \lambda_j t.$$

Nu kan vi gå tillbaka och lösa ut $\boldsymbol{y}(t) = T\boldsymbol{z}(t)$ samt med hjälp av begynnelsevillkoren bestämma de obekanta konstanterna α_j och β_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Anmärkning 21.8.

1. Inhomogena ekvationer

$$\boldsymbol{y}''(t) + A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$$

behandlas på samma sätt som ovan.

2. Andra ordningens system av typen $n \times n$ i (21.14) kan reduceras till ett $2n \times 2n$ system av första ordningen

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}'(t) + \Lambda\boldsymbol{Y}(t) &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Y}(0) &= \boldsymbol{Y}_0 \end{cases}$$

genom att sätta

$$\boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{y}'(t) \end{pmatrix}$$

och

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & E \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

där E är en $n \times n$ enhetsmatris. En följd av denna omskrivning är att matrisen Λ inte behöver vara diagonaliserbar och därmed kan inte heller teorin ovan användas utan vidare.