Vi sätter

$$\boldsymbol{z}(t) = T^{-1}\boldsymbol{y}(t) \qquad \text{dvs} \qquad \boldsymbol{y}(t) = T\boldsymbol{z}(t)$$

och får

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{y}'(t) = TDT^{-1}\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow T^{-1}\boldsymbol{y}'(t) = DT^{-1}\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{z}'(t) = D\boldsymbol{z}(t).$$

Med matrisen D insatt i systemet ovan får vi

$$\boldsymbol{z}'(t) = D\boldsymbol{z}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} z_1'(t) & = & 6z_1(t) \\ z_2'(t) & = & 12z_2(t) \\ z_3'(t) & = & 18z_3(t) \end{array} \right.$$

Differentialekvationssystemet har lösningen

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1(t) & = & c_1e^{6t} \\ z_2(t) & = & c_2e^{12t} \\ z_3(t) & = & c_3e^{18t} \end{array} \right.$$

där c_1, c_2 och c_3 är konstanter. Lösningen till ursprungliga systemet blir därmed

$$\boldsymbol{y}(t) = T\boldsymbol{z}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{6t} \\ c_2e^{12t} \\ c_3e^{18t} \end{pmatrix}. \tag{21.9}$$

Lösningen kan också ges på formen

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{12t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{18t}$$

eller då komponentvis

$$y_1(t) = c_1e^{6t} - c_2e^{12t} + c_3e^{18t}, \quad y_2(t) = c_1e^{6t} - 2c_3e^{18t}, \quad y_3(t) = c_1e^{6t} + c_2e^{12t} + c_3e^{18t}.$$

För den speciella lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret sätter vi in $t = 0$ i lösningen ovan. T.ex. sätter vi in $t = 0$ i (21.9) och får

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -21 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Speciella lösningen är alltså

$$y_1(t) = 13e^{6t}21e^{12t} + 2e^{18t}, \quad y_2(t) = 13e^{6t} - 4e^{18t}, \quad y_3(t) = 13e^{6t} - 2e^{12t} + 2e^{18t}.$$

$\square$

Exempel 21.4. Bestäm alla lösningar till systemet

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 2y_1(t) - 6y_2(t) \\ y_2'(t) &= -2y_1(t) - 2y_2(t). \end{cases}$$

Bestäm den speciella lösning som uppfyller $y_1(0) = 4$ och $y_2(0) = 8$.

Lösning: Systemet kan skrivas $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, där $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.
Eftersom matrisen inte är symmetrisk kan vi inte använda spektralsatsen som garanterar att A är diagonaliserbar. Matrisen A har egenvärdena $\lambda_1 = -4$ och $\lambda_2 = 4$ med egenvektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)^t$ och $\boldsymbol{v}_2 = (3,-1)^t$. Eftersom $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är linjärt oberoende säger Sats 18.15 att A är diagonaliserbar, dvs $A = TDT^{-1}$. Substitutionen $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{z}$ ger att

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y}' = TDT^{-1}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow T^{-1}\boldsymbol{y}' = DT^{-1}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{z}' = D\boldsymbol{z} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1'(t) &= -4z_1(t) \\ z_2'(t) &= 4z_2(t) \end{cases}$$

som har lösningen $z_1 = c_2e^{-4t}$, $z_2 = c_2e^{4t}$. Allmän lösning är alltså $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{z}$, dvs

$$y_1 = c_1e^{-4t} + 3c_2e^{4t}, \qquad y_2 = c_1e^{-4t} - c_2e^{4t}.$$

Speciella lösningen är $y_1 = 7e^{-4t} - 3e^{4t}$ och $y_2 = 7e^{-4t} + e^{4t}$. $\square$

21.2. Begynnelsevärdesproblem

Nedan ska vi ta hänsyn till att ett begynnelsevillkor hör också till systemet av differentalekvationer.
Lösning (21.6) till det frikopplade systemet (21.5) kan vi skriva på matrisform

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1(t) &=& c_1e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) &=& c_2e^{\lambda_2 t} \\ z_3(t) &=& c_3e^{\lambda_3 t}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3\end{pmatrix}.$$

Låt oss titta närmare på diagonalmatrisen $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t}\end{pmatrix}$. Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+\lambda_1 t+\frac{\lambda_1^2t^2}{2!}+\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 t+\frac{\lambda_2^2t^2}{2!}+\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1+\lambda_3 t+\frac{\lambda_3^2t^2}{2!}+\cdots\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2\end{pmatrix} + \cdots \\
&= E + tD + \frac{t^2}{2!}D^2 + \cdots \\
&= e^{tD}.
\end{aligned}$$

Detta motiverar följande definition

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t}\end{pmatrix}.$$

Med denna definition kan lösningen (21.7) skrivas

$$\boldsymbol{y}(t) = Te^{tD}\boldsymbol{c}. \tag{21.10}$$

Vidare gäller att eftersom

$$A = TDT^{-1},\ A^2 = TD^2T^{-1},\ A^3 = TD^3T^{-1}, \ldots, A^n = TD^nT^{-1}$$

för varje heltal n, så får vi om vi multiplicerar

$$e^{tD} = E + tD + \frac{t^2}{2!}D^2 + \cdots,$$

med T och T^{-1} från vänster respektive höger att

$$\begin{aligned}
Te^{tD}T^{-1} &= TET^{-1} + tTDT^{-1} + \frac{t^2}{2!}TD^2T^{-1} + \cdots \\
&= E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots \\
&= e^{tA}.
\end{aligned}$$

Alltså gäller att

$$e^{tA} = Te^{tD}T^{-1}.$$

Vi sammanfattar resultaten i det här avsnittet:

Sats 21.5. 1. Den allmänna lösningen till $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, ges av

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1\boldsymbol{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{v}_2e^{\lambda_2 t} + c_3\boldsymbol{v}_3e^{\lambda_3 t}, \tag{21.11}$$

eller

$$\boldsymbol{y}(t) = Te^{tD}\boldsymbol{c}.$$

2. Lösningen till **begynnelsevärdesproblemet** $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$, ges av

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{tA}\boldsymbol{y}_0, \tag{21.12}$$

eller

$$\boldsymbol{y} = Te^{tD}T^{-1}\boldsymbol{y}_0. \tag{21.13}$$

21.3. Inhomogena linjära system

Vi har i förra avsnitt härlett en teori för begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) &= A\boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

där A är en diagonaliserbar matris. Vi kunde också visa i (21.12) att lösningen till detta problem ges av

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{tA}\boldsymbol{y}_0.$$

Denna teori kan generaliseras till **inhomogena system av differentialekvationer**

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) &= A\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

Man kan faktiskt följa stegen (21.3)-(21.12) i förra avsnittet och härleda lösningen

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{tA}\boldsymbol{y}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau.$$

Exempel 21.6. Lös $\begin{cases} y_1'(t) &= 2y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) &= 4y_1(t) - 3y_2(t) \quad + \quad e^t, \end{cases}$ där $y_1(0) = 1$ och $y_2(0) = 0$.

Lösning: Vi skriver systemet på matrisform $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{f}(t)$, där $\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar med $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ och $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Vi får att

$$\boldsymbol{y}_H(t) = e^{tA}\boldsymbol{y}_0 = Te^{tD}T^{-1}\boldsymbol{y}_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4e^t - e^{-2t} & -e^t + e^{-2t} \\ 4e^t - e^{-2t} & -e^t + 4e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4e^t - e^{-2t} \\ 4e^t - 4e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Vidare gäller att

$$e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4e^{t-\tau} - e^{-2(t-\tau)} & -e^{t-\tau} + e^{-2(t-\tau)} \\ 4e^{t-\tau} - e^{-2(t-\tau)} & -e^{t-\tau} + 4e^{-2(t-\tau)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^t + e^{-2t+3\tau} \\ -e^t + 4e^{-2t+3\tau} \end{pmatrix},$$

samt

$$\boldsymbol{y}_P(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3te^t + e^t - e^{-2t} \\ -3te^t + 4e^t - 4e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen ges därmed av

$$\boldsymbol{y}_A(t) = \boldsymbol{y}_H(t) + \boldsymbol{y}_P(t) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9te^t + 13e^t - 4e^{-2t} \\ -3te^t + 16e^t - 16e^{-2t} \end{pmatrix},$$

dvs $y_1(t) = (-9te^t + 13e^t - 4e^{-2t})/9$ och $y_2(t) = (-3te^t + 16e^t - 16e^{-2t})/9$.

21.4. System av högre ordning

Vi har i tidigare avsnitt studerat linjära system av första ordningens differentialekvationer. Teorin vi härledde där kan faktiskt utan större bekymmer komma att gälla även linjära system av högre ordningens differentialekvationer. Vi ska nedan beskriva kort t.ex. hur svängningsproblem som beskrivs av andra ordnings linjära system kan lösas.

Exempel 21.7. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}''(t) + A\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}_0 \\ \boldsymbol{y}'(0) &= \boldsymbol{y}_1 \end{cases} \tag{21.14}$$

där A är en $n \times n$ positiv matris. Sådana matriser är diagonaliserbara med positiva egenvärden $\lambda_j^2 > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Detta betyder att vi kan skriva diagonalmatrisen på formen D^2 och därmed gäller att $A = TD^2T^{-1}$. Sätter vi $\boldsymbol{z}(t) = T^{-1}\boldsymbol{y}(t)$ kan ekvationen skrivas på formen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}''(t) + A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y}''(t) + TD^2T^{-1}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow T^{-1}\boldsymbol{y}''(t) + D^2T^{-1}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{z}''(t) + D^2\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Komponentvis betyder detta att

$$z_j''(t) + \lambda_j^2 z(t) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

med lösningen

$$z_j(t) = \alpha_j \cos \lambda_j t + \beta_j \sin \lambda_j t.$$

Nu kan vi gå tillbaka och lösa ut $\boldsymbol{y}(t) = T\boldsymbol{z}(t)$ samt med hjälp av begynnelsevillkoren bestämma de obekanta konstanterna α_j och β_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Anmärkning 21.8.

1. Inhomogena ekvationer

$$\boldsymbol{y}''(t) + A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$$

behandlas på samma sätt som ovan.

2. Andra ordningens system av typen $n \times n$ i (21.14) kan reduceras till ett $2n \times 2n$ system av första ordningen

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}'(t) + \Lambda\boldsymbol{Y}(t) &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Y}(0) &= \boldsymbol{Y}_0 \end{cases}$$

genom att sätta

$$\boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{y}'(t) \end{pmatrix}$$

och

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & E \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

där E är en $n \times n$ enhetsmatris. En följd av denna omskrivning är att matrisen Λ inte behöver vara diagonaliserbar och därmed kan inte heller teorin ovan användas utan vidare.