20.2. Andragradsytor

Låt oss titta på motsvarande situation i rummet.Återigen låt $\underline{e}$ vara en ON-bas, Q en kvadratisk form, och c en fix konstant. Mängden av punkter vars ortsvektorer $\boldsymbol{u}$ uppfyller

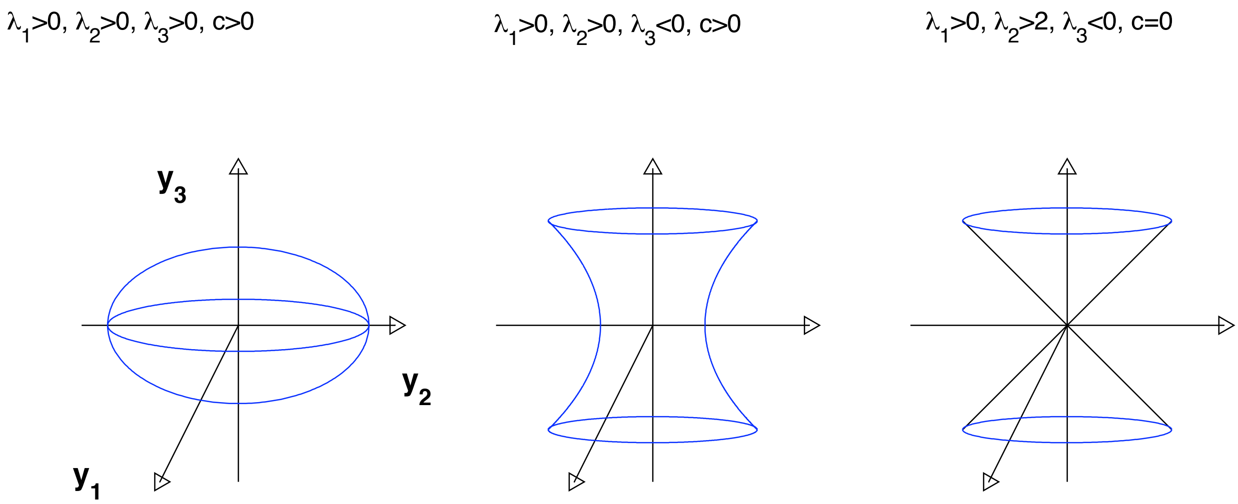
$$Q(\boldsymbol{u}) = Q(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{jk}x_jx_k = c$$

beskriver en **andragradsyta** som kan vara en **ellipsoid**, en **enmantlad**, **tvåmantlad hyperboloid** eller **kon**. För att avgöra detta går vi över till den kanoniska basen där Q får följande utseende

$$Q(\boldsymbol{u}) = Q(y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + y_3\boldsymbol{f}_3) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = c.$$

1. Om $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, och $c > 0$, så är kurvan en ellipsoid.
2. Om $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, och $c > 0$, så är kurvan en hyperboloid
3. Om $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, och $c = 0$, så är kurvan en kon.

Figur 20.15.



Observera: Om ett egenvärde är noll så är kurvan en **cylinder**. T.ex., om $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ och λ_3 så beskriver kurvan $y_1^2 + y_2^2 = c$ en rak cylinder med symmetriaxeln parallell med y_3-axeln.

Exempel 20.16. Låt d vara avståndet från en punkt på ytan som i en ON-bas $\underline{\boldsymbol{e}}$ i rummet ges med ekvationen $7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 1$.

1. Tolka ytan.
2. Vilka värden kan d anta?
3. I förekommande fall ange de punkter där d antar sitt största respektive minsta värde.

Lösning: 1. Vänstra ledet i ekvationen kan skrivas på matrisform

$$7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = X^tAX, \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

är en symmetrisk matris. Egenvärdena till A är $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ och $\lambda_3 = 9$ med tillhörande ortonormerade egenvektorerna $\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)^t$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}(2,-2,1)^t$, och $\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{3}(2,1,-2)^t$. Inför vi nu en ny ON-bas bestående av egenvektorerna, dvs en kanonisk bas, så kan ekvationen skrivas

$$3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2 = 1$$

som är en ellipsoid.
2. Vi söker största och minsta värde på $d^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, då $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2 = 1$. Då vi söker bestämma största värdet är termen y_1^2 med minst koefficient som är mest intressant. Vi löser ut $y_1^2 = \frac{1}{3}\big(1 - 6y_2^2 - 9y_3^2\big)$ och sätter in den i d^2. Det följer att

$$d^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{1}{3}\big(1 - 6y_2^2 - 9y_3^2\big) + y_2^2 + y_3^2 = \frac{1}{3} - y_2^2 - 2y_3^2 \le \frac{1}{3}.$$

När det gäller att söka minsta värdet är y_3^2 med störst koefficient som är mest intressant. Vi löser ut $y_3^2 = \frac{1}{9}\big(1 - 3y_1^2 - 6y_2^2\big)$ och sätter in den i d^2. Vi får

$$d^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{9}\big(1 - 3y_1^2 - 6y_2^2\big) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 \ge \frac{1}{9}.$$

Alltså är $\frac{1}{9} \le d^2 \le \frac{1}{3}$, dvs $\frac{1}{3} \le d \le \frac{\sqrt{3}}{3}$. Största värdet på d fås alltså i $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1,0,0)$ i den nya basen och i den gamla i

$$X = TY = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{\sqrt{3}}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

dvs i $\pm\frac{\sqrt{3}}{9}(1,2,2)$. Minsta värdet för d fås i $\pm\frac{1}{3}(0,0,1)$ i den nya basen vilket ger

$$X = TY = \pm\frac{1}{3}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

dvs $\pm\frac{1}{9}(2,1,-2)$ i den gamla basen. $\square$