10.4. Linjära höljet

Definition 10.37. Mängden av alla linjärkombinationer av $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ i ett linjärt rum V kallas för **linjära höljet** av M och betecknas $[M]$, dvs

$$[M] = \{\boldsymbol{u} \in V : \ \boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n\}$$

eller

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = \{\boldsymbol{u} \in V : \ \boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n\}.$$

Anmärkning 10.38. Linjära höljet $[M]$ av en mängd $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subset V$ är ett underrum i V. Om $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in [M]$, så gäller att

$$\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n$$

och

$$\boldsymbol{u}_2 = \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{v}_n.$$

För summan gäller att

$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = (\lambda_1 + \mu_1)\boldsymbol{v}_1 + (\lambda_2 + \mu)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)\boldsymbol{v}_n \in [M]$$

och för multiplikation med ett reellt tal μ gäller att

$$\mu \boldsymbol{u}_1 = \mu\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu\lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu\lambda_n \boldsymbol{v}_n \in [M].$$

Alltså är $[M]$ ett underrum i V. □

Exempel 10.39. Låt $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ vara två vektorer i $\mathbf{R}^3$. Då gäller att

1. Höljet
$$W_1 = [\boldsymbol{v}_1] = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 : \ \boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{v}_1\}$$
är en linje genom origo med riktningsvektorn $\boldsymbol{v}_1$.

2. Om $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ inte är parallella, så är höljet
$$W_2 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 : \ \boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2\}$$
ett plan genom origo med riktningsvektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$.

3. Om $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är parallella, dvs $\boldsymbol{v}_2 = t\boldsymbol{v}_1$, så är höljet
$$W_2 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 : \ \boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 = \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 t)}_{=\lambda} \boldsymbol{v}_1 = \lambda \boldsymbol{v}_1\} = [\boldsymbol{v}_1]$$
en linje genom origo med riktningsvektorn $\boldsymbol{v}_1$. □

Exempel 10.40. Betrakta mängderna $M_1 = \{\boldsymbol{v}_1 = (1,-1,0)^t, \boldsymbol{v}_2 = (1,0,-1)^t\} \subset \mathbf{R}^3$ och $M_2 = \{\boldsymbol{w}_1 = (2,-1,-1)^t, \boldsymbol{w}_2 = (0,-1,1)^t\} \subset \mathbf{R}^3$. Visa att M_1 och M_2 spänner upp samma linjära hölje, dvs $[M_1] = [M_2]$.

Lösning: Alternativ 1. Vi visar att $[M_1] = [M_2]$ genom att visa att

a) M_1 ligger i M_2, dvs $[M_1] \subset [M_2]$.

b) M_2 ligger i M_1, dvs $[M_2] \subset [M_1]$.

a) Vi har att $\boldsymbol{v}_1$ är en linjärkombination av $M_2 = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, ty

$$\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{w}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{w}_2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 1/2 \\ \lambda_2 & = & 1/2 \end{array}\right.$$

På samma sätt kan man visa att

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dvs $\boldsymbol{v}_2$ är också en linjärkombination av M_2. Alltså är $[M_1] \subset [M_2]$.

b) På samma sätt som i a) kan man visa att

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

och

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2,$$

dvs $\boldsymbol{w}_1$ och $\boldsymbol{w}_2$ är linjärkombinationer av $M_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ vilket visar att $[M_2] \subset [M_1]$.

Eftersom vi har visat att $[M_1] \subset [M_2]$ och $[M_2] \subset [M_1]$, så har vi visat att $[M_1] = [M_2]$.

Alternativ 2. Både $[M_1]$ och $[M_2]$ är plan genom origo där $[M_1]$ spänns upp av riktningsvektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ och $[M_2]$ spänns upp av $\boldsymbol{w}_1$ och $\boldsymbol{w}_2$. Normalerna till $[M_1]$ och $[M_2]$ ges av

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)^t$$

respektive

$$\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2 = (1,1,1)^t.$$

Vi får alltså att

$$[M_1] = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = [M_2].$$

$\square$

Exempel 10.41. Mängderna $M_1 = \{(1,1,0)^t, (0,1,1)^t\}$ och $M_2 = \{(1,0,0)^t, (1,1,0)^t, (1,1,1)^t\}$ är givna. Är $[M_1] = [M_2]$?

Lösning: Höljet $[M_1]$ är ett plan genom origo som spänns upp av vektorerna $(1,1,0)^t$, och $(0,1,1)^t$. Vidare är mängden M_2 linjärt oberoende, ty systemet

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

har endast den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Detta betyder att mängden M_2 spänner upp $\mathbf{R}^3$ och därmed är $[M_2] = \mathbf{R}^3$.

Alltså kan inte underrummen $[M_1]$ och $[M_2]$ vara lika. □

Följande resultat visar att vi kan ta bort en linjärkombination ur en mängd utan att mängdens hölje förändras.

Sats 10.42. Antag att $\boldsymbol{v}_n$ är en linjärkombination av mängden

$$M' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}\}$$

och låt mängden $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$. Då är

$$[M] = [M'].$$

Bevis: 1. Vi visar $[M'] \subset [M]$: Eftersom varje element $\boldsymbol{u}$ i $[M']$ är av typen

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots \lambda_{n-1} \boldsymbol{v}_{n-1},$$

så är detta också ett element i $[M]$. Alltså $[M'] \subset [M]$.

2. Vi visar $[M] \subset [M']$: Antag $\boldsymbol{v}_n$ är en linjärkombination av de övriga, dvs

$$\boldsymbol{v}_n = \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots \mu_{n-1} \boldsymbol{v}_{n-1}.$$

Om $\boldsymbol{u} \in [M]$, så gäller att

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots \alpha_{n-1} \boldsymbol{v}_{n-1} + \alpha_n \boldsymbol{v}_n \\
&= \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots \alpha_{n-1} \boldsymbol{v}_{n-1} + \alpha_n \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots \mu_{n-1} \boldsymbol{v}_{n-1} \\
&= (\alpha_1 + \mu_1) \boldsymbol{v}_1 + (\alpha_2 + \mu_2) \boldsymbol{v}_2 + \cdots (\alpha_{n-1} + \mu_{n-1}) \boldsymbol{v}_{n-1} \\
&= \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \boldsymbol{v}_{n-1},
\end{aligned}$$

där $\lambda_k = \alpha_k + \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Alltså är $\boldsymbol{u} \in [M']$.

Eftersom båda $[M'] \subset [M]$ och $[M] \subset [M']$ gäller så är $[M] = [M']$. □

Exempel 10.43. Betrakta mängden $M = \{(1,1,0)^t, (0,1,1)^t, (2,5,3)^t\} \subset \mathbf{R}^3$. Utred den geometriska tolkningen av det linjära höljet $[M]$.

Lösning: Det är inte säkert att alla vektorer i M behövs för att beskriva underrummet $[M]$. Enligt Sats 10.42 kan vi ur M stryka onödiga linjärkombinationer utan att $[M]$ ändras. För att ta reda på linjärkombinationer undersöker vi linjärt beroende hos M. Systemet

$$\lambda_1(1,1,0)^t + \lambda_2(0,1,1)^t + \lambda_3(2,5,3)^t = \mathbf{0} \tag{10.5}$$

har lösningen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = -1$. Alltså är M linjärt beroende och minst en av vektorerna är en linjärkombination i de övriga. Med $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = -1$ insatta i (10.5) får vi linjärombinationen

$$(2,5,3)^t = 2(1,1,0)^t + 3(0,1,1)^t. \tag{10.6}$$

Vi skulle alltså kunna stryka $(2,5,3)^t$ ur M utan att $[M]$ ändras. Låt oss titta lite närmare på detta. Med hjälp av linjärkombinationen i (10.6) får vi

$$\begin{aligned}
[M] &= [(1,1,0)^t, (0,1,1)^t, (2,5,3)^t] = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 :\ \boldsymbol{u} = \mu_1(1,1,0)^t + \mu_2(0,1,1)^t + \mu_3(2,5,3)^t\} \\
&= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 :\ \boldsymbol{u} = \mu_1(1,1,0)^t + \mu_2(0,1,1)^t + \mu_3(2(1,1,0)^t + 3(0,1,1)^t)\} \\
&= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 :\ \boldsymbol{u} = (\mu_1 + 2\mu_3)(1,1,0)^t + (\mu_2 + 3\mu_3)(0,1,1)^t\} \\
&= \{\lambda_1 = \mu_1 + 2\mu_3, \qquad \lambda_2 = \mu_2 + 3\mu_3\} \\
&= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 :\ \boldsymbol{u} = \lambda_1(1,1,0)^t + \lambda_2(0,1,1)^t\} \\
&= [(1,1,0)^t, (0,1,1)^t]
\end{aligned}$$

dvs $[M] = [(1,1,0)^t, (0,1,1)^t]$. Alltså är underrumet $[M]$ ett plan genom origo med riktningsvektorerna $(1,1,0)^t$ och $(0,1,1)^t$. □

Exempel 10.44. Hyperplan. Vi såg i Exempel 10.35 att den givna mägden där beståede av fyra vektorer spänner upp hela $\mathbf{R}^4$., dvs

$$[\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,1)^t, \boldsymbol{v}_2 = (1,-1,1,-1)^t, \boldsymbol{v}_3 = (1,1,-1,-1)^t, \boldsymbol{v}_4 = (1,-1,-1,1)^t] = \mathbf{R}^4.$$

I det här exemplet vill vi undersöka vad tre av dessa vektorerna spänner upp och försöka ge en geomtrisk tolkning åt detta. Vi vill alltså studera närmare det linjära höljet

$$U = [\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,1,-1)^t, \boldsymbol{v}_3 = (1,1,-1,-1)^t, \boldsymbol{v}_4 = (1,-1,-1,1)^t.$$

Lösning: Vektorn $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in U$ om det finns tal λ_2, λ_3 och λ_4, så att

$$\boldsymbol{u} = \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 + \lambda_4\boldsymbol{v}_4 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 1 & -1 & x_2 \\ 1 & -1 & -1 & x_3 \\ -1 & -1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & 0 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 2 & x_4 + x_1 \end{array}\right).$$

Alltså för att $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ skall få tillhöra U så måste dess koordinater uppfylla ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Vi skulle därmed kunna uttrycka U via en ekvation, dvs

$$U = [\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4] = \{\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbf{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Det är självklart inte lätt att ge en geometrisk tolkning åt U i $\mathbf{R}^4$. Ett sätt är att använda samma terminologi som i $\mathbf{R}^3$, där vi kallar en ekvation av typen

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$$

för ett plan. En ekvation i $\mathbf{R}^4$ av typen

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 + E = 0$$

kallar vi för **hyperplan**. I det här exemplet är U ett hyperplan genom origo. $\square$

Exempel 10.45. **Snittet** mellan mängderna U och V är mängden av alla gemensamma vektorer som ligger i både i U och V och som vi betecknar $U \cap V$. Antag att U är underrummet i Exempel 10.44:

$$U = \{\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbf{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

och

$$V = \{\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbf{R}^4 : \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Vi vill bestämma $U \cap V$ som då ges av

$$U \cap V = \{\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbf{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

Lösning: För att en vektor $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbf{R}^4$ ska ligga i både i U och V krävs det att dess koordinater x_1, x_2, x_3 och x_4 satisfierar båda ekvationerna samtidigt, dvs

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ -2x_2 - 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Sätter vi $x_4 = t$ och $x_3 = s$ så får vi att $x_2 = -t$ och $x_1 = -s$. Vi får därmed att vektorerna som ligger i snittet $U \cap V$ är av typen $\boldsymbol{u} = s(-1, 0, 1, 0)^t + t(0, -1, 0, 1)^t$. Alltså är $U \cap V = [(-1, 0, 1, 0)^t, (0, -1, 0, 1)^t]$.