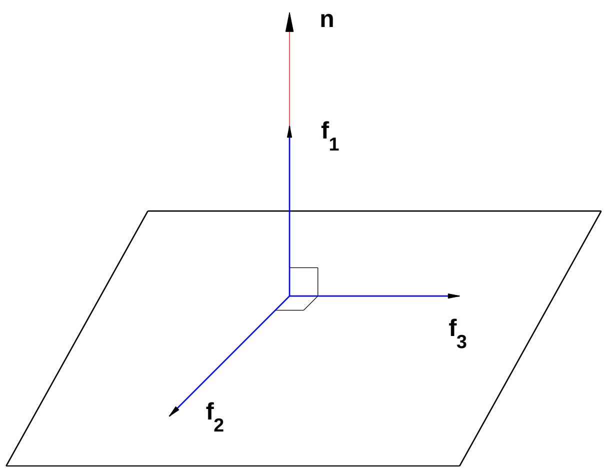
16.10. Projektioner och speglingar med basbyte

Exempel 16.53. Vi bestämmer nu den ortogonala projektionen P på planet $W: \quad 2x - y - 2z = 0$ i Exempel 16.14 genom **basbyte**.

Lösning:

Figur 16.54.



Låt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ vara en ON-bas i rummet. Eftersom normalen avbildas på nollvektorn låter vi den första nya basvektorn med längd 1 vara $\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp W$ (ortogonal mot W).

Vi väljer den andra basvektorn $\boldsymbol{f}_2$ ortogonal mot $\boldsymbol{f}_1$ och också med längd 1. Vi tar t.ex. $\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel W$ (parallell med W).

Till sist väljer vi den tredje basvektorn $\boldsymbol{f}_3 \parallel W$ ortogonal mot både $\boldsymbol{f}_1$ och $\boldsymbol{f}_2$ och dessutom med längd 1. Vi måste också se till att $\boldsymbol{f}_3$ väljes på ett sådant sätt att vi får ett positivt höger orienterat system. Därför låter vi

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bassambandet ges alltså av $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$, där $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ är ortogonal.

Vi projicerar nu $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ och $\boldsymbol{f}_3$:

$$
\begin{aligned}
P(\boldsymbol{f}_1) &= \boldsymbol{0} &&= 0\cdot\boldsymbol{f}_1 + 0\cdot\boldsymbol{f}_2 + 0\cdot\boldsymbol{f}_3 &&= \underline{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
P(\boldsymbol{f}_2) &= \boldsymbol{f}_2 &&= 0\cdot\boldsymbol{f}_1 + 1\cdot\boldsymbol{f}_2 + 0\cdot\boldsymbol{f}_3 &&= \underline{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\
P(\boldsymbol{f}_3) &= \boldsymbol{f}_3 &&= 0\cdot\boldsymbol{f}_1 + 0\cdot\boldsymbol{f}_2 + 1\cdot\boldsymbol{f}_3 &&= \underline{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Avbildningsmatrisen i basen $\underline{\boldsymbol{f}}$ är alltså $A_{\underline{\boldsymbol{f}}} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Sambandet mellan avbildningsmatriserna ger att avbildningsmatrisen i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ ges av:

$$A_{\underline{\boldsymbol{e}}} = TA_{\underline{\boldsymbol{f}}}T^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}5&2&4\\2&8&-2\\4&-2&5\end{pmatrix}.$$

Vi kan nu visa följande egenskaper hos en ortogonal projektion på ett plan.

Anmärkning 16.55. Antag att P är en ortogonal projektion på ett plan och att en ny ON-bas $\underline{\boldsymbol{f}}$ väljes, där $\boldsymbol{f}_1$ är parallell med normalen samt $\boldsymbol{f}_2$ och $\boldsymbol{f}_3$ parallella med planet, jfr med Exempel 16.53, så gäller att

1. $A_{\underline{\boldsymbol{f}}} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ är symmetrisk.

2. $A_{\underline{\boldsymbol{e}}}$ är symmetrisk, ty

$$A^t_{\underline{\boldsymbol{e}}} = (TA_{\underline{\boldsymbol{f}}}T^t)^t = (T^t)^tA^t_{\underline{\boldsymbol{f}}}T^t = TA_{\underline{\boldsymbol{f}}}T^t = A_{\underline{\boldsymbol{e}}}$$

.

3. $\det A_{\underline{\boldsymbol{e}}} = \det(T)\det(A_{\underline{\boldsymbol{f}}})\det(T^t) = \det(A_{\underline{\boldsymbol{f}}}) = 0$

□

Exempel 16.56. Bestäm speglingen i planet $W: \quad 2x - y - 2z = 0$ i Exempel 16.17 med hjälp av **basbyte**.

Lösning: Som en ny ON-bas för problemet tar vi den vi tog fram i Exempel 16.53, dvs $\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp W$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel W$ och $\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel W$. Därmed har vi samma T. Bilden av den nya ON-basen blir $S(\boldsymbol{f}_1) = -\boldsymbol{f}_1 = \underline{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ty normalen speglas på motsatt riktning, $S(\boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{f}_2 = \underline{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ty en vektor i planet W speglas på sig själv, och $S(\boldsymbol{f}_3) = \boldsymbol{f}_3 = \underline{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ återigen en vektor i planet W som speglas på sig själv.

Avbildningsmatrisen i den nya basen $\underline{\boldsymbol{f}}$ är då $A_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och i den gamla basen

$$A_{\boldsymbol{e}} = TA_{\boldsymbol{f}}T^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning 16.57. Om $A_{\boldsymbol{e}}$ är matrisen till en spegling, så är

1. $A_{\boldsymbol{e}}$ symmetrisk.
2. $\det A_{\boldsymbol{e}} = \det(T)\det(A_{\boldsymbol{f}})\det(T^t) = -1$.
3. $\det A_{\boldsymbol{e}}^2 = E$, där E är enhetsmatrisen.

□

Exempel 16.58. Bestäm ortogonala projektionen på den räta linjen $L: \quad t(1,2,-2)^t$ i Exempel 16.19 genom basbyte.

Lösning: Vi byter till en lämplig ON-bas till problemet. Låt $\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Då gäller att

$P(\boldsymbol{f}_1) = \boldsymbol{f}_1 = 1\cdot\boldsymbol{f}_1 + 0\cdot\boldsymbol{f}_2 + 0\cdot\boldsymbol{f}_3 = \underline{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Välj t.ex. $\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Då får vi att $P(\boldsymbol{f}_2) = \mathbf{0} = 0\cdot\boldsymbol{f}_1 + 0\cdot\boldsymbol{f}_2 + 0\cdot\boldsymbol{f}_3 = \underline{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Till sist låter

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Även här gäller att $P(\boldsymbol{f}_3) = \mathbf{0} = 0\cdot\boldsymbol{f}_1 + 0\cdot\boldsymbol{f}_2 + 0\cdot\boldsymbol{f}_3 = \underline{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bassambandet ges alltså av $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$, där $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ är ortogonal.

Avbildningsmatrisen för projektionen P i basen $\underline{\boldsymbol{f}}$ är alltså $A_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sambandet mellan avbildningsmatriserna ger att avbildningsmatrisen för projektionen P i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ ges av:

$$A_{\boldsymbol{e}} = TA_{\boldsymbol{f}}T^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observera: $A_{\boldsymbol{e}}$ är symmetrisk och

$$\det A_{\boldsymbol{e}} = \det(TA_{\boldsymbol{f}}T^t) = \det(T)\det(A_{\boldsymbol{f}})\det(T^t) = \det(A_{\boldsymbol{f}}) = 0.$$

□

Exempel 16.59. Bestäm speglingen i den räta linjen $t(1,2,-2)^t$ i Exempel 16.21 genom att byta bas.

Lösning: Enda skillnaden mot ovan är att $S(\boldsymbol{f}_2) = -\boldsymbol{f}_2$ och att $S(\boldsymbol{f}_3) = -\boldsymbol{f}_3$. Detta betyder att $A_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ och därmed ges avbildningsmatrisen för speglingen S i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ av

$$A_{\boldsymbol{e}} = TA_{\boldsymbol{f}}T^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observera: att även här är $A_{\boldsymbol{e}}$ är symmetrisk men att

$$\det A_{\boldsymbol{e}} = \det(TA_{\boldsymbol{f}}T^t) = \det(T)\det(A_{\boldsymbol{f}})\det(T^t) = \det(A_{\boldsymbol{f}}) = 1.$$

□