18.2. Diagonalisering

Låt F vara en linjär avbildning på ett n-dimensionellt linjärt rum V som har matrisen A i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ för V. Vi har i Sats 18.8 sett att om F har en bas av egenvektorer $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, så ges matrisen för F i denna bas av en diagonalmatris

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Låt T vara transformationsmatrisen vid basbytet från den gamla basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ till den nya basen $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$. Då gäller enligt sambandet 16.20 för avbildningsmatriser att matrisen för F i den nya basen ges av

$$T^{-1}AT = D \qquad \Leftrightarrow \qquad A = TDT^{-1}.$$

Vi säger då att T **diagonaliserar** matrisen A. Vi sammanfattar

Sats 18.15. 1. A är **diagonaliserbar** $\Leftrightarrow$ det finns en inverterbar transformationsmatris T och en diagonal egenvärdesmatris D, så att

$$A = TDT^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad D = T^{-1}AT.$$

2. F har en bas av egenvektorer $\Leftrightarrow$ matrisen A är diagonaliserbar.

Följande sats ger ett tillräckligt villkor för existensen av bas av egenvektorer.

Sats 18.16. 1. Om $F : V \to V$ är linjär och $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ är egenvektorer med **skilda** egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, så är $\boldsymbol{v}_j$:na linjärt oberoende.

2. Om $\dim V = n$ och F har n skilda egenvärden så har V en bas bestående av egenvektorer till F.

3. Om $\dim V = n$ så har F högst n skilda egenvärden.

Bevis: Vi kommer endast att visa 1. Påståndena 2. och 3. följer genast av tidigare satser. För att visa 1. räcker det att visa att

$$\mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu_k\boldsymbol{v}_k + \cdots + \mu_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \tag{18.8}$$

endast har lösningen $\mu_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Om F får verka på uttrycket i (18.8) så

$$F(\mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu_k\boldsymbol{v}_k + \cdots + \mu_n\boldsymbol{v}_n) = F(\boldsymbol{0})$$

dvs

$$\mu_1 F(\boldsymbol{v}_1) + \mu_2 F(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \mu_k F(\boldsymbol{v}_k) + \cdots + \mu_n F(\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}.$$

Utnyttjar vi att $\boldsymbol{v}_j$, $j = 1, 2, \ldots$ är egenvektorer med egenvärdena λ_j, $j = 1, 2, \ldots$ får vi att

$$\mu_1 \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu_k \lambda_k \boldsymbol{v}_k + \cdots + \mu_n \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}. \tag{18.9}$$

Med induktionsbevis ser vi att fallet $n = 1$ i (18.8) visar att $\mu_1 = 0$ och att $\boldsymbol{v}_1$ är linjärt oberoende (trivialt!). Antag nu att $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ är linjärt oberoende. Multiplicerar vi nu (18.8) med λ_n och tar differensen med (18.9) så får vi

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_n)\boldsymbol{v}_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_n)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_n)\boldsymbol{v}_k + \cdots + \mu_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\boldsymbol{v}_{n-1} = \mathbf{0}.$$

Eftersom det är linjärt oberoende så måste

$$\mu_j(\lambda_j - \lambda_n) = 0 \Leftrightarrow \mu_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Sätter vi in detta i (18.9) får vi att även $\mu_n = 0$ och därmed är påståndet visat.

Exempel 18.17. Vilka avbildningar i Exempel 18.14 har en bas av egenvektorer, dvs vilka matriser är diagonaliserbara?

Lösning: a) Egenvektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ resp. $\boldsymbol{v}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är ortogonala och bildar därmed en bas $\underline{\boldsymbol{v}}$ för rummet. Matrisen T i bassambandet

$$\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{e}}T, \qquad \text{där} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

är inverterbar och alltså är A diagonaliserbar $A = TDT^{-1}$, där $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

Jämför med Exempel 16.52: $A_{\boldsymbol{f}} = D$. Alltså A diagonaliserbar eftersom

$$\text{antal egenvärden} = 3 = \text{antal linjärt oberoende egnvektorer.}$$

b) Här är $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Egenrummen är $E_{\lambda_1} = [(-1, 1, -2)^t)]$ resp. $E_{\lambda_{2,3}} = [(1, 1, 0)^t), (-2, 0, 1)^t]$. Även här har vi 3 linjärt oberoende egenvektorer som är en bas för rummet, så att B är digonaliserbar. Alltså är

$$A = TDT^{-1} \quad \text{där} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observera att om vi vill ha en ON-bas $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3'\}$ för att undvika invertera T, så väljer vi $\boldsymbol{v}_3' = (1, -1, -1)^t$ ur $E_{\lambda_{2,3}}$ istället för $\boldsymbol{v}_3$. Detta kan vi göra utan att ändra höljet $E_{\lambda_{2,3}}$.

c) Egenvärdena är $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ med egenrummet $E_{\lambda=1} = [(-2, 0, 1)^t]$. Här har vi inte tillräckligt många egenvektorer, ty

$$\text{antal egenvärden} = 3 \neq 1 = \text{antalet linjärt oberoende vektrorer.}$$

Alltså är C ej diagonaliserbar.

d) Ej heller D är diagonaliserbar då antalet egenvektorer är bara 2, ty $E_{\lambda=1} = [(1, 0, 0)^t, (0, 0, 1)^t]$. Egenvärden var här $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. $\square$