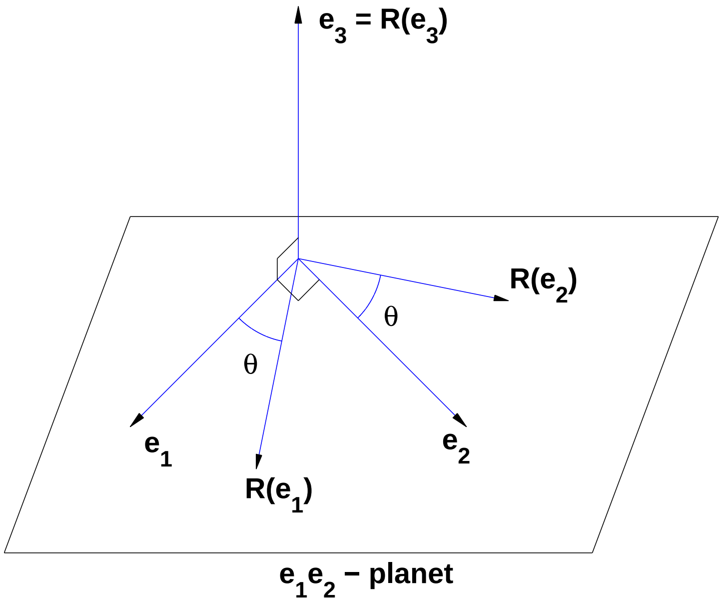
16.5. Rotation i rummet

Exempel 16.28. Rotationen R i Exempel 16.23 i $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$–planet kan betraktas som en rotation i rummet sett från $\boldsymbol{e}_3$:s spets. Detta betyder att vi kan se rotationen R som en rotation kring en axel parallell med vektorn $\boldsymbol{e}_3$.

Figur 16.29.



Vektorn $\boldsymbol{e}_3$ kallas då för rotationsaxeln och den vrids på sig själv. Vidare gäller att

$$\begin{cases} R(\boldsymbol{e}_1) &= \cos\theta\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_2 + 0\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ R(\boldsymbol{e}_2) &= -\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2 + 0\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ R(\boldsymbol{e}_3) &= 0\cdot\boldsymbol{e}_1 + 0\cdot\boldsymbol{e}_2 + 1\cdot\boldsymbol{e}_3 \end{cases} \tag{16.10}$$

Avbildningsmatrisen för rotationen R kring $\boldsymbol{e}_3$ moturs en vinkel θ ges alltså av

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vridningen sker alltså i $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$–planet och vektorn $\boldsymbol{e}_3$ avbildas på sig själv.

På motsvarande sätt kan man visa att matrisen för en rotation moturs vinkeln θ kring rotationsaxeln $\boldsymbol{e}_1$ ges av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Här är vridningen förstås i $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$–planet. □

Anmärkning 16.30. Avbildningsmatris till en rotation A i planet eller i rummet är ortogonal. □

Exempel 16.31. Rotationen R i rummet moturs vinkeln θ kring en axel parallell med $\boldsymbol{e}_3$ har avbildningsmatrisen

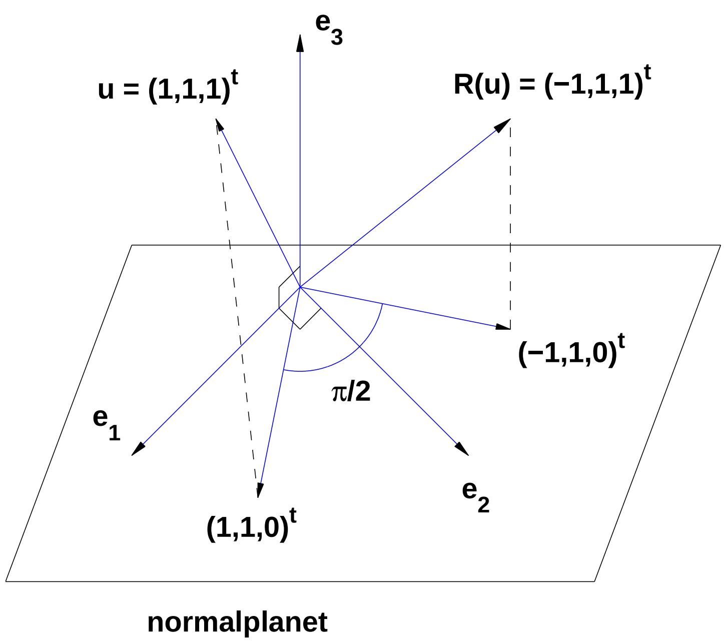
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Antag att vi vill vrida vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}(1,1,1)^t$ vinkeln $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Då får vi bilden

$$R(\underline{\boldsymbol{e}}(1,1,1)^t) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jämför vi med Exempel 16.26 ser vi att en vridning vinkeln θ kring $\boldsymbol{e}_3$ är en vridning i **normalplanet** $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ till $\boldsymbol{e}_3$ vinkeln θ.

Figur 16.32.



Följande resultat är en följd av ortogonala matriser.

Sats 16.33. Om A är ortogonal, så är $\det A = \pm 1$.

Bevis: Eftersom $A^tA = E$, så följer att

$$1 = \det(E) = \det(A^tA) = \det A^t \cdot \det A = \det A \cdot \det A = (\det A)^2,$$

vilket ger att $\det A = \pm 1$. □

Vi har i Exempel 16.28 roterat rummets vektorer kring en axel parallell med en av basvektorerna, i det här fallet har det varit $\boldsymbol{e}_3$. Vridningen har därmed skett i $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$-planet, dvs normalplanet till $\boldsymbol{e}_3$ och vi har därför kunnat bestämma bilden av basvekterena $F(\boldsymbol{e}_1)$ och $F(\boldsymbol{e}_2)$ ganska enkelt, se sambandet i (16.10). Situationen då vridningen är kring en axel parallell med en godtycklig vektor får vänta med till avsnitt 16.11 om basbyte, ty vi behöver då hitta en lämplig bas för problemet som överför det på fallet i Exempel 16.28.