10. Linjära rum

10.1. Definition av linjära rum

Definition 10.1. Vi säger att en mängd V är ett linjärt rum om V har följande egenskaper:

1. För varje $\boldsymbol{u} \in V$ och $\boldsymbol{v} \in V$ finns ett element $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ som kallas **summan** av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.

2. För varje $\lambda \in \mathbf{R}$ och $\boldsymbol{u} \in V$ finns ett element $\lambda\boldsymbol{u} \in V$ som kallas **produkten** av λ och $\boldsymbol{u}$.

3. Följande räknelagar skall gälla i V:

   (a) **Kommutativa lagen** $\quad \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

   (b) **Associativa lagen** $\quad \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

   (c) **Distributiva lagarna** $\quad (\lambda + \mu)\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$

   $$\lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v}$$

Anmärkning 10.2. Elementen i ett linjärt rum kan t.ex. vara funktioner; ändå brukar dessa kallas **vektorer** och ofta kallas linjära rum för **vektorrum**.

Exempel 10.3. Det viktigaste exemplet på linjära rum här är $\mathbf{R}^n$ som är mängden av alla reella tal n-tipler ($n \times 1$-matriser)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$$

med komponentvis addition

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t + (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^t \in \mathbf{R}^n$$

och multiplikation med tal

$$\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)^t \in \mathbf{R}^n.$$

Med **nollelementet** i $\mathbf{R}^n$ menar vi

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)^t.$$

Räknelagarna i Definition 10.1 är därmed uppfyllda och $\mathbf{R}^n$ är ett linjärt rum. $\square$

Exempel 10.4. Låt M_{mn} vara mängden av alla $m \times n$ matriser, dvs

$$M_{mn} = \{A = (a_{ij})_{m\times n}\}.$$

Med matrisen $\mathbf{0}$ menar vi den matris av typ $m \times n$ som har alla elemnet 0. På det sätt vi har definierat addition och multiplikation med tal på i Definition 6.2 följer att räknelagarna i Definition 10.1 är uppfyllda och M_{mn} är ett linjärt rum, ty om $A = (a_{ij})_{m\times n}$ och $B = (b_{ij})_{m\times n}$ är två matriser i M_{mn}, så är summan en matris $C \in M_{mn}$:

$$C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = (c_{ij})_{m\times n} \in M_{mn}$$

och multiplikation med tal också en matris i M_{mn}:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n} \in M_{mn}.$$

□

Exempel 10.5. Låt a och b vara reella tal och betrakta differentialekvationen

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \tag{10.2}$$

Låt r_1 och r_2 vara rötterna till andragradsekvationen

$$r^2 + ar + b = 0. \tag{10.3}$$

Funktionerna $y_1(x) = e^{r_1 x}$ och $y_2(x) = e^{r_2 x}$ är lösningar till differentialekvationen (10.2), ty om vi deriverar $y_1(x)$ en gång och två gånger får vi

$$y_1'(x) = r_1 e^{r_1 x}, \qquad y_1''(x) = r_1^2 e^{r_1 x}$$

och sätter in dessa i ekvation (10.2):

$$y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x) = r_1^2 e^{r_1 x} + ar_1 e^{r_1 x} + be^{r_1 x} = e^{r_1 x}(r_1^2 + ar_1 + b) = 0$$

eftersom r_1 är en rot till ekvationen (10.3). På samma sätt kan man visa att $y_2(x)$ är också en lösning till differentialekvationen (10.2). Låt L vara mängden av alla lösningar till differentialekvationen (10.2), dvs

$$L = \{y : \; y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0\},$$

så är L ett linjärt rum, ty summan $y_1 + y_2 \in L$:

$$(y_1 + y_2)'' + a(y_1 + y_2)' + b(y_1 + y_2) = \underbrace{y_1'' + ay_1' + b}_{=0} + \underbrace{y_2'' + ay_2' + b}_{=0} = 0$$

och multiplikation med tal är också en lösning i L:

$$(\lambda y_1(x))'' + a(\lambda y_1(x))' + b(\lambda y_1(x)) = \lambda(y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)) = 0,$$

dvs $(\lambda y_1) \in L$. Dessutom tillhör nollelementet (här noll-lösning) $y \equiv 0$ också L.
På grund av detta säger vi att ekvationen (10.2) är **linjär**. Vi säger också att ekvationen är **homogen** som fallet är nu när högra ledet är 0. □

Exempel 10.6. Låt $\mathcal{P}_n$ vara mängden av alla polynom av grad $\leq n$, dvs

$$\mathcal{P}_n = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\}.$$

Antag att $p, q \in \mathcal{P}_n$. Då är $p + q \in \mathcal{P}_n$ och $\lambda p \in \mathcal{P}_n$, dvs $\mathcal{P}_n$ är ett vektorrum, ty om $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ och $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$, så är

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \in \mathcal{P}_n \end{aligned}$$

och

$$\lambda p(x) = \lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \cdots + \lambda a_nx^n \in \mathcal{P}_n.$$

$\square$

Exempel 10.7. Låt $C^n[a, b]$ beteckna mängden av alla n gånger kontinuerligt deriverbara funktioner på intervallet $a \leq t \leq b$. Låt också $\mathbf{0}$ beteckna den funktion som är identiskt lika med noll. Antag att $f, g \in C[a, b]$ och $\lambda \in \mathbf{R}$. Då är $f + g \in C^n[a, b]$ och $(\lambda f) \in C^n[a, b]$, ty om vi deriverar k gånger, där $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, så får vi

$$\frac{d^k}{dx}(f + g)(x) = f^{(k)}(x) + g^{(k)}(x) \in C^n[a, b]$$

och

$$\frac{d^k}{dx}(\lambda f)(x) = \lambda f^{(k)}(x) \in C^n[a, b].$$

Räknelagarna i Definition 10.1 är därmed uppfyllda och $C^n[a, b]$ är ett linjärt rum. $\square$

Vi har ovan sett ett antal mängder som är exempel på linjära rum. Vi fortsätter nedan med att visa på mängder som inte är linjära rum.

Exempel 10.8. Låt M_{22} vara mängden av alla 2×2-matriser sådana att elementet på rad 1 och kolonn 1 är lika med 2, dvs

$$M_{22} = \{A = (a_{ij})_{m \times n},\ a_{11} = 2\}.$$

Då är M_{22} inte ett linjärt rum, ty om $A = \begin{pmatrix} 2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{22}$ och $B = \begin{pmatrix} 2 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_{22}$, så är

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 4 & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \notin M_{22},$$

eftersom $c_{11} = 4 \neq 2$. $\square$

Exempel 10.9. Lösningsmängden L till differentialekvationen $y'(x) - y^2(x) = 0$, dvs

$$L = \{y,\ y'(x) - y^2(x) = 0\}$$

är inte ett linjärt rum. Antag att $y \in L$, dvs $y'(x) = y^2(x)$ Då vill vi visa att även (λy) är en lösning. Vi får att

$$(\lambda y)'(x) - (\lambda y)^2(x) = \lambda y'(x) - \lambda^2 y^2(x) = \lambda y^2(x) - \lambda^2 y^2(x) = \lambda y^2(x)(1-\lambda) \neq 0,$$

dvs $(\lambda y) \notin L$. Att L inte är tom inses av att nollösningen $y \equiv 0$ tillhör L likaså funktionen $y(x) = -\dfrac{1}{x}$. □

Exempel 10.10. Mängden av alla polynom av grad exakt 2, dvs

$$M = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ a_2 \neq 0\}$$

är inte ett linjärt rum. Antag att $p, q \in M$, där $p(x) = a_0 + a_1 x + cx^2$ och
$q(x) = b_0 + b_1 x + cx^2$, så är polynomet $p - q \notin M$, ty

$$p(x) - q(x) = (a_0 + a_1 x + cx^2) - (b_0 + b_1 x + cx^2) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x \notin M,$$

eftersom gradtalet är 1 och inte 2. □

Exempel 10.11. Mängden av alla kontinuerliga funktioner på intervallet $[a, b]$ som är sådana att $f(a) = 1$, dvs

$$M = \{f \in C[a, b] :\ f(a) = 1\}$$

är inte ett linjärt rum, ty om $f, g \in M$, så är $f + g \notin M$ eftersom

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) = 1 + 1 = 2 \neq 1.$$

□