10.5. Linjärt beroende

Definition 10.46. Låt mängden $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ vara i ett linjärt rum V.
Vi säger att M är **linjärt beroende** om det finns reella tal λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ej alla noll, så att

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Annars säger vi att M är **linjärt oberoende**.

Exempel 10.47. Undersök om mängden $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\} \subset \mathbf{R}^4$, där $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,1)^t$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,1,-1)^t$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,1,-1,-1)^t$ och $\boldsymbol{v}_4 = (1,-1,-1,1)^t$ är linjärt beroende eller oberoende.

Lösning: Mängden $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\} \subset \mathbf{R}^4$ är linjärt beroende om det finns reella tal λ_1, λ_2, λ_3 och λ_4 ej alla noll, så att

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 + \lambda_4 \boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}.$$

Löser vi detta system får vi den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Detta kan också inses av att $\det A = 16 \neq 0$. Enligt Sats 8.17 är då A inverterbar, så att systemet $A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ har den entydiga lösningen $\boldsymbol{\lambda} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Alltså är M linjärt oberoende. □

Exempel 10.48. Är funktionsmängden

$$M = \{p_1(x) = 1 + x, p_2(x) = 1 + x^2, p_3(x) = 2 + x + x^2\} \subset \mathcal{P}_2$$

linjärt beroende?

Lösning: Mängden $M = \{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathcal{P}_2$ är linjärt beroende om det finns reella tal λ_1, λ_2 och λ_3 ej alla noll, så att

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1(1 + x) + \lambda_2(1 + x^2) + \lambda_3(2 + x + x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) \cdot 1 + (\lambda_1 + \lambda_3) \cdot x + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccr} \lambda_1 & = & -t \\ \lambda_2 & = & -t \\ \lambda_3 & = & t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Vi har alltså fått en parameterlösning för ekvationsystemet, vilket betyder att minst ett polynom är en linjärkombination i de övriga polynomen:

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = \mathbf{0} \Leftrightarrow -tp_(x) - tp_2(x) + tp_3(x) = 0 \Leftrightarrow p_(x) + p_2(x) - p_3(x) = 0$$

efter att ha dividerat med $-t$. □

Sats 10.49. Mängden $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subset V$ är linjärt beroende

$$\Leftrightarrow$$

ett element är en linjärkombination i de övriga.

Bevis: $\Rightarrow$: Antag att M är linjärt beroende, dvs

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

för något λ skilt från 0, t.ex. skulle det kunna vara $\lambda_1 \neq 0$. Vi löser ut tillhörande vektor $\boldsymbol{v}_1$:

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \boldsymbol{v}_n$$

och ser att $\boldsymbol{v}_1$ är linjärkombination av de övriga.

$\Leftarrow$: Antag att ett element i mängden är linjärkombination av de övriga, t.ex. anta att det är $\boldsymbol{v}_1$. Då är

$$\boldsymbol{v}_1 = \mu_2 \boldsymbol{v}_2 \cdots + \mu_n \boldsymbol{v}_n$$

eller

$$1 \cdot \boldsymbol{v}_1 - \mu_2 \boldsymbol{v}_2 \cdots - \mu_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

vilket visar att M linjärt beroende. □

Med hjälp av Sats 10.49 kan vi ibland lite snabbare avgöra om en given mängd är linjärt beroende.

Exempel 10.50. a) Ingen vektor i mängden $M = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, där

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t, \qquad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^t, \qquad \ldots \qquad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^t$$

är linjärkombination i de övriga, ty ettorna står på olika platser. Alltså är M linjärt oberoende.

b) Mängden $M = \{1, x, x^2\} \subset \mathcal{P}_n$ är linjärt oberoende eftersom inget polynom är en linjärkombination i de övriga. □