20.2. Andragradskurvor

Låt $\underline{\boldsymbol{e}}$ vara en ON-bas i planet och $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ en godtycklig vektor. Låt vidare Q vara en kvadratisk form i planet sådan att

$$Q(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{jk}x_jx_k = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2.$$

Mängden av punkter vars ortsvektorer $\boldsymbol{u}$ uppfyller

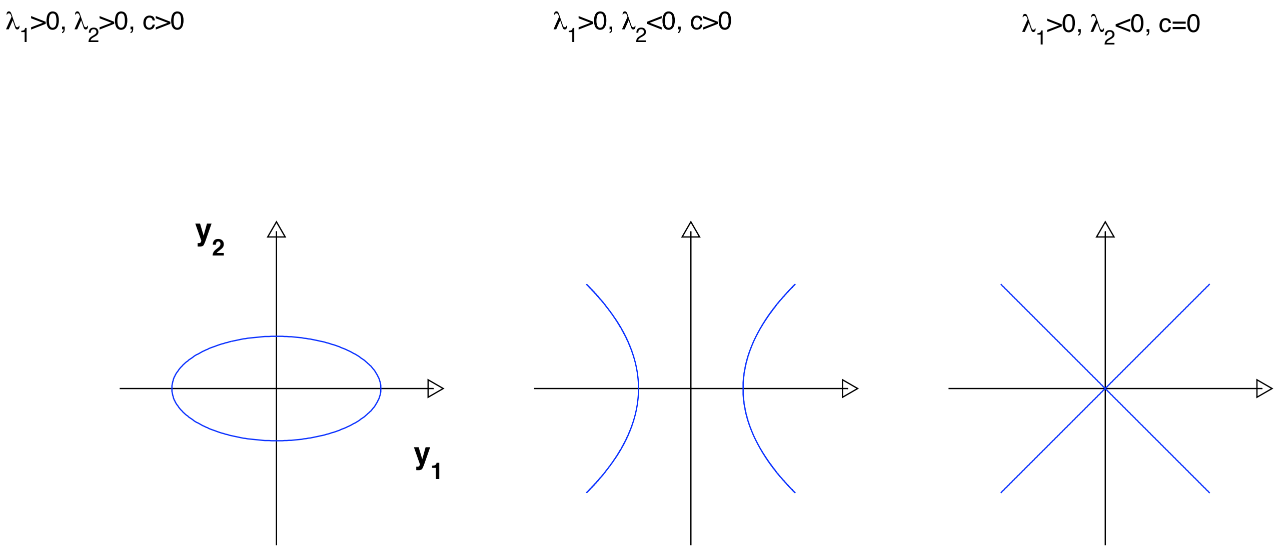
$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = c$$

för en fix konstant c beskriver en **andragradskurva** som kan vara en **ellips**, en **hyperbel** eller **räta linjer**. Detta inses enklast då vi skriver om Q i kanonisk bas, dvs i en ON-bas av egenvektorer $\underline{\boldsymbol{f}}$, så att

$$Q(\boldsymbol{u}) = Q(y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = c.$$

1. Om $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ och $c > 0$, så är kurvan en ellips.
2. Om $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ och $c > 0$, så är kurvan en hyperbel.
3. Om $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ och $c = 0$, så är kurvan räta linjer.

Figur 20.9.



Observera: Kurvan $y = \lambda x^2$ (eller $y^2 = \lambda x$) beskriver en **parabel**.

Exempel 20.10. En kurva har ekvationen $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1$ i en plan ON-bas $\underline{e}$.

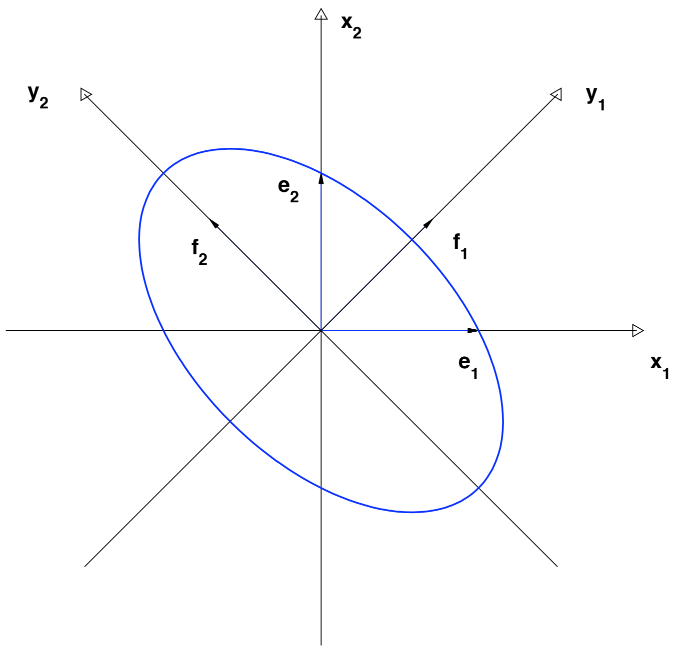
1. Ge en geometrisk tolkning åt kurvan.
2. Bestäm de punkter på kurvan som ligger närmast respektive längst bort från origo.
3. Bestäm arean av det område som som innesluts av kurvan.

Lösning: 1. Vänstra ledet i ekvationen är en kvadratisk form som kan skrivas på matrisform $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = X^tAX$, där $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärdena $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ och $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Tillhörande ortonormerade egenvektorer är $\boldsymbol{f}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ och $\boldsymbol{f}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^t$, så att $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. I den nya basen blir ekvationen

$$\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y_1^2}{\left(\sqrt{2}/\sqrt{3}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

Detta är ekvationen för en ellips med halvaxlarna $\sqrt{\frac{2}{3}}$ och $\sqrt{2}$. Lillaxeln ligger i riktningen $\boldsymbol{f}_1$ och storaxeln i riktningen $\boldsymbol{f}_2$.

Figur 20.11.



2. Punkterna i den nya basen $\underline{\boldsymbol{f}}$ som ligger närmast respektive längst bort från origo ligger på lillaxeln $\pm\sqrt{2/3}(1,0)$ respektive storaxeln $\pm\sqrt{2}(0,1)$.

I den gamla basen ges koordinaterna för närmaste punkter av

$$X = TY = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dvs punkterna $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1)$. Koordiaterna för punkterna längst bort från origo ges av

$$X = TY = \pm\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dvs punkterna $\pm(-1,1)$.
3. För att beräkna arean av ellipsen så avbildar vi den på en cirkel. Vi **kvadratkompletterar** vänstra ledet så att

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2.$$

Inför vi nya koordinater genom att sätta

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \xi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

kan ekvationen $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1$ nu skrivas

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1.$$

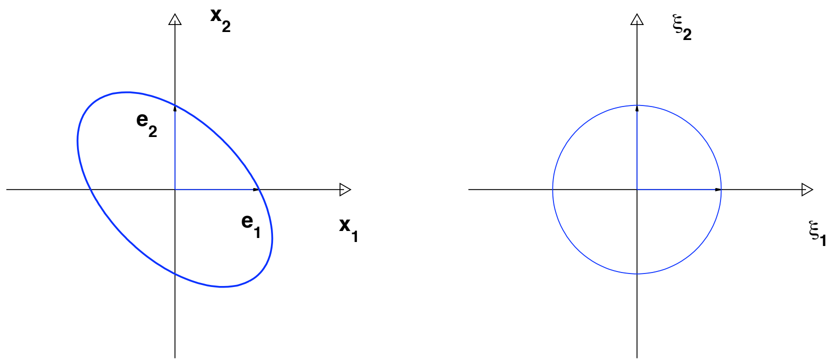
Detta är ekvationen för enhetscirkeln som har arean π a.e. Detta ger genom **ytskalan** som är lika med determinanten till avbildningen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

att

$$\text{arean för ellipsen} = \frac{1}{\sqrt{3}/2}\,\text{arean för cirkeln} = \frac{1}{\sqrt{3}/2}\,\pi = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\pi \text{ a.e.}$$

Figur 20.12.



Exempel 20.13. Låt d vara avståndet från en punkt på kurvan $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 10$ till origo. Vilka värden kan d anta? I förekommande fall ange de punkter där d antar sitt största respektive minsta värde.

Lösning: Vänstra ledet i ekvationen är en kvadratisk form som kan skrivas på matrisform $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = X^tAX$, där $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ med egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 5$. Tillhörande ortonormerade egenvektorer är $\boldsymbol{f}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ och $\boldsymbol{f}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^t$, så att $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. I den nya basen blir ekvationen

$$y_1^2 + 5y_2^2 = 10. \tag{20.5}$$

Detta är ekvationen för en ellips.
Avståndet från en punkt (y_1, y_2) till origo är enligt Pythagorassats

$$d = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Löser vi ut $y_1^2 = 10 - 5y_2^2$ i ekvationen (20.5, får vi

$$d^2 = y_1^2 + y_2^2 = 10 - 5y_2^2 + y_2^2 = 10 - 5y_2^2 \leq 10,$$

och löser vi ut $y_2^2 = (10 - y_1^2)/5$, får vi att

$$d^2 = y_1^2 + y_2^2 = y_1^2 + \frac{10 - y_1^2}{5} = \frac{4}{5}y_1^2 + 2 \geq 2,$$

Alltså, $2 \leq d^2 \leq 10$, dvs $\sqrt{2} \leq d \leq \sqrt{10}$. Minsta värdet $\sqrt{2}$ antas i $Y = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, dvs

$$X = TY = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Största värdet $\sqrt{10}$ antas i $Y = \pm\begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs

$$X = TY = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exempel 20.14. Låt $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ vara en ON-bas för planet och betrakta den kvadratiska formen

$$Q(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2.$$

1. Uttryck Q i en ON-bas av egenvektorer och beskriv kurvan $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4$.
2. Bestäm tangeringspunkterna mellan kurvan $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4$ och enhetscirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Lösning: Vi har att $Q(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = X^t \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X = X^tAX$.

Eftersom A är symmetrisk säger spektralsatsen att A är diagonaliserbar med $A = TDT^t$. Nu är $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ och $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Q i en ON-bas av egenvektorer kan skrivas

$$Q = X^t \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X = X^tTDT^tX = \boldsymbol{y}^tD\boldsymbol{y} = 2y_1^2 + 4y_2^2.$$

Kurvan kan skrivas $2y_1^2 + 4y_2^2 = 4$ och är alltså en ellips med stora axeln längs $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ och lilla axeln längs $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^t$. Tangeringspunkterna ges av

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2y_1^2 + 4y_2^2 & = & 4 \\ y_1^2 + y_2^2 & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & 0 \\ y_2 & = & \pm 1 \end{array} \right.$$

i nya basen och i gamla basen av

$$X = \pm T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dvs } \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1).$$

i nya basen och i gamla basen av

$$X = \pm T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dvs } \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1).$$