16.2. Matrisframställning

Enligt Exempel 16.9 räcker det om vi känner bilden av basvektorerna $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$ under F för att vi ska kunna bestämma bilden av varje vektor $\boldsymbol{u}$, ty låt

$$\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3, \quad \text{dvs} \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}X.$$

Då följer att

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{u}) &= F(\underline{\boldsymbol{e}}X) = F(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3) = xF(\boldsymbol{e}_1) + yF(\boldsymbol{e}_2) + zF(\boldsymbol{e}_3) \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | \\ F(\boldsymbol{e}_1) & F(\boldsymbol{e}_2) & F(\boldsymbol{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}AX. \end{aligned}$$

Vi har därmed visat följande sats.

Sats 16.11. Låt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ vara en bas för V och låt $F : V \to V$ vara linjär. Då ges bilden av en godtycklig vektor $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X$ av:

$$F(\boldsymbol{u}) = \underline{\boldsymbol{e}}AX,$$

där matrisen A innehåller i sina kolonner bilden av basvektorerna, dvs

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \cdot & | \\ F(\boldsymbol{e}_1) & F(\boldsymbol{e}_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & F(\boldsymbol{e}_n) \\ | & | & \cdot & | \end{pmatrix}.$$

Exempel 16.12. Låt $F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ vara en avbildning på rummet, där $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

1. Är F linjär?
2. Bestäm bilden av vektorerna $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$.
3. Bestäm avbildningsmatrisen till F då F är linjär.
4. Bestäm också $F(\boldsymbol{w})$ om $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$.

Lösning: 1. a) Vi börjar med att visa additiviteten. Enligt räknelagarna för vektorprodukt gäller att

$$F(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \times \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{u}_1) + F(\boldsymbol{u}_2).$$

b) Vi visar att F är homogen:

$$F(\lambda \boldsymbol{u}) = (\lambda \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \lambda F(\boldsymbol{u}).$$

Alltså är F linjär.

2. Bilden av basvektorerna:

$$F(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 \times (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \underbrace{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}_{=\boldsymbol{e}_3} + \underbrace{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3}_{-\boldsymbol{e}_2} = -\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_2 \times (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

och

$$F(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_3 \times (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3a. F:s matris innehåller i sina kolonner bilden av basvektorerna, så att

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ F(\boldsymbol{e}_1) & F(\boldsymbol{e}_2) & F(\boldsymbol{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3b. A kan också bestämmas via bilden av <u>endast</u> en godtycklig vektor $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$:

$$F(\boldsymbol{u}) = (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) \times (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3).$$

Förenkling ger

$$F(\boldsymbol{u}) = (x_2 - x_3)\boldsymbol{e}_1 + (-x_1 + x_3)\boldsymbol{e}_2 + (x_1 - x_2)\boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Omskrivning med hjälp av matris:

$$F(\boldsymbol{u}) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

4a. Bilden $F(\boldsymbol{w})$ av $\boldsymbol{w}$ kan bestämmas med hjälp av bilden av basvektroerna

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{w}) &= F(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3) = F(\boldsymbol{e}_1) + 2F(\boldsymbol{e}_2) + 3F(\boldsymbol{e}_3) \\ &= \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\,\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4b. eller också genom att använda avbildningsmatrisen:

$$F(\boldsymbol{w}) = F(\underline{\boldsymbol{e}}(1,2,3)^t) = \underline{\boldsymbol{e}}A(1,2,3)^t = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exempel 16.13. Antag att F är en linjär avbildning på rummet och att $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ är en bas i rummet. Bestäm matrisen för F i denna bas om

$$F\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad F\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad F\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},$$

dvs

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \\ F(\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{e}_3 \\ F(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3) &= 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

Bestäm också bilden $F(\boldsymbol{u})$ av vektorn $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

Lösning: För att lösa ut de obekanta $F(\boldsymbol{e}_1)$, $F(\boldsymbol{e}_2)$, och $F(\boldsymbol{e}_3)$ ur ekvationssytemet utnyttjar vi att F är linjär. Vänstra ledet i systemet kan då skrivas

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3) &= F(\boldsymbol{e}_1) + 3F(\boldsymbol{e}_2) + 4F(\boldsymbol{e}_3) \\ F(\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) &= F(\boldsymbol{e}_2) + 2F(\boldsymbol{e}_3) \\ F(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3) &= F(\boldsymbol{e}_2) - F(\boldsymbol{e}_3) \end{cases}$$

Därmed kan det nya ekvationssytemet skrivas

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} F(\boldsymbol{e}_1) & + & 3F(\boldsymbol{e}_2) & + & 4F(\boldsymbol{e}_3) & = & \boldsymbol{e}_1 & + & \boldsymbol{e}_2 & & \\ & & F(\boldsymbol{e}_2) & + & 2F(\boldsymbol{e}_3) & = & & & & & \boldsymbol{e}_3 \\ & & F(\boldsymbol{e}_2) & - & F(\boldsymbol{e}_3) & = & 3\boldsymbol{e}_1 & & & + & \boldsymbol{e}_3 \end{array}\right.$$

Utför vi radopertioner får vi att

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} F(\boldsymbol{e}_1) & + & 3F(\boldsymbol{e}_2) & + & 4F(\boldsymbol{e}_3) & = & \boldsymbol{e}_1 & + & \boldsymbol{e}_2 \\ & & F(\boldsymbol{e}_2) & + & 2F(\boldsymbol{e}_3) & = & & & \boldsymbol{e}_3 \\ & & & - & 3F(\boldsymbol{e}_3) & = & 3\boldsymbol{e}_1 & & \end{array}\right.$$

Ur rad 3 får vi att $\quad F(\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{e}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Sätts detta in i rad 2 fås att $\quad F(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

Slutligen får vi ur rad 1 att $\quad F(\boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$.

Avbildningsmatrisen är därmed

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidare gäller att

$$F(\boldsymbol{u}) = F\left(\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \underline{\boldsymbol{e}}A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},$$

dvs, $F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$. □