21. Linjära system

21.1. System av differentialekvationer

Många problem i tillämpningen modelleras av **system** av **differentialekvationer**. I det här avsnittet kommer vi att studera **första ordningens linjära differentialekvationssytem**:

$$\left\{\begin{array}{lllllll} y_1'(t) & = & a_{11}y_1(t) & + & a_{12}y_2(t) & + & a_{13}y_3(t) \\ y_2'(t) & = & a_{21}y_1(t) & + & a_{22}y_2(t) & + & a_{23}y_3(t) \\ y_3'(t) & = & a_{31}y_1(t) & + & a_{32}y_2(t) & + & a_{33}y_3(t) \end{array}\right. \qquad \text{eller} \qquad \boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t),$$

där A är en 3×3 matris. Det allmänna fallet med $n \times n$ matris följer på ett analogt sätt. I det här avsnittet ska vi bestämma alla lösningar till differentialekvationssystemet:

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t). \tag{21.2}$$

Exempel 21.1. Antag att A är diagonaliserbar, dvs $A = TDT^{-1}$, där matrisen T innehåller i sina kolonner egenvektorerna och D är diagonalmatrisen med egenvärdena till A. Då kan ekvationen i (21.2) skrivas:

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{y}'(t) = TDT^{-1}\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow T^{-1}\boldsymbol{y}'(t) = DT^{-1}\boldsymbol{y}(t). \tag{21.3}$$

Sätter vi nu

$$\boldsymbol{z}(t) = T^{-1}\boldsymbol{y}(t) \qquad \text{dvs} \qquad \boldsymbol{y}(t) = T\boldsymbol{z}(t)$$

får vi

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{y}'(t) = TDT^{-1}\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow T^{-1}\boldsymbol{y}'(t) = DT^{-1}\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{z}'(t) = D\boldsymbol{z}(t).$$

Den nya ekvationen

$$\boldsymbol{z}'(t) = D\boldsymbol{z}(t) \qquad \text{dvs} \qquad \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} \tag{21.4}$$

är ett **diskretiserat** (**frikopplat**) system. Om vi tittar på ekvationen komponentvis

$$\left\{\begin{array}{lll} z_1'(t) & = & \lambda_1 z_1(t) \\ z_2'(t) & = & \lambda_2 z_2(t) \\ z_3'(t) & = & \lambda_3 z_3(t) \end{array}\right. \tag{21.5}$$

ser vi att den har lösningen

$$\left\{\begin{array}{lll} z_1(t) & = & c_1 e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) & = & c_2 e^{\lambda_2 t} \\ z_3(t) & = & c_3 e^{\lambda_3 t} \end{array}\right. \tag{21.6}$$

där $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ är en godtycklig vektor.

Lösningen $\boldsymbol{y}$ till det ursprungliga problemet (21.2) ges alltså av

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t) &= T\boldsymbol{z}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_3 e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} && (21.7) \\ &= c_1 \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \boldsymbol{v}_3 e^{\lambda_3 t}. && (21.8)\end{aligned}$$

□

Sats 21.2. Om A är diagonaliserbar med egenvärdena λ_1, λ_2 och λ_3, med tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$, så har problemet

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t)$$

den allmänna lösningen

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \boldsymbol{v}_3 e^{\lambda_3 t}.$$

Exempel 21.3. Bestäm alla lösningar till

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} y_1'(t) &=& 11y_1(t) &-& 4y_2(t) &-& y_3(t) \\ y_2'(t) &=& -4y_1(t) &+& 14y_2(t) &-& 4y_3(t) \\ y_3'(t) &=& -y_1(t) &-& 4y_2(t) &+& 11y_3(t) \end{array}\right.$$

Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 36 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Lösning: Systemet kan på matrisform skrivas enligt

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t), \quad \text{där} \quad \boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -1 \\ -4 & 14 & -4 \\ -1 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Enligt Exempel 18.14 så har A egenvärdena $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 12$ och $\lambda_3 = 18$ med tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eftersom A är symmetrisk säger spektralsatsen att A är diagonaliserbar; $A = TDT^{-1}$,

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Byte till bas av egenvektorer ger

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{y}'(t) = TDT^{-1}\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow T^{-1}\boldsymbol{y}'(t) = DT^{-1}\boldsymbol{y}(t).$$

Vi sätter

$$\boldsymbol{z}(t) = T^{-1}\boldsymbol{y}(t) \qquad \text{dvs} \qquad \boldsymbol{y}(t) = T\boldsymbol{z}(t)$$

och får

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{y}'(t) = TDT^{-1}\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow T^{-1}\boldsymbol{y}'(t) = DT^{-1}\boldsymbol{y}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{z}'(t) = D\boldsymbol{z}(t).$$

Med matrisen D insatt i systemet ovan får vi

$$\boldsymbol{z}'(t) = D\boldsymbol{z}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1'(t) &= 6z_1(t) \\ z_2'(t) &= 12z_2(t) \\ z_3'(t) &= 18z_3(t) \end{cases}$$

Differentialekvationssystemet har lösningen

$$\begin{cases} z_1(t) &= c_1e^{6t} \\ z_2(t) &= c_2e^{12t} \\ z_3(t) &= c_3e^{18t} \end{cases}$$

där c_1, c_2 och c_3 är konstanter. Lösningen till ursprungliga systemet blir därmed

$$\boldsymbol{y}(t) = T\boldsymbol{z}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{6t} \\ c_2e^{12t} \\ c_3e^{18t} \end{pmatrix}. \tag{21.9}$$

Lösningen kan också ges på formen

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{12t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{18t}$$

eller då komponentvis

$$y_1(t) = c_1e^{6t} - c_2e^{12t} + c_3e^{18t}, \quad y_2(t) = c_1e^{6t} - 2c_3e^{18t}, \quad y_3(t) = c_1e^{6t} + c_2e^{12t} + c_3e^{18t}.$$

För den speciella lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret sätter vi in $t = 0$ i lösningen ovan. T.ex. sätter vi in $t = 0$ i (21.9) och får

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -21 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Speciella lösningen är alltså

$$y_1(t) = 13e^{6t}21e^{12t} + 2e^{18t}, \quad y_2(t) = 13e^{6t} - 4e^{18t}, \quad y_3(t) = 13e^{6t} - 2e^{12t} + 2e^{18t}.$$

□

Exempel 21.4. Bestäm alla lösningar till systemet

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 2y_1(t) - 6y_2(t) \\ y_2'(t) &= -2y_1(t) - 2y_2(t). \end{cases}$$

Bestäm den speciella lösning som uppfyller $y_1(0) = 4$ och $y_2(0) = 8$.

Lösning: Systemet kan skrivas $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, där $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.
Eftersom matrisen inte är symmetrisk kan vi inte använda spektralsatsen som garanterar att A är diagonaliserbar. Matrisen A har egenvärdena $\lambda_1 = -4$ och $\lambda_2 = 4$ med egenvektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)^t$ och $\boldsymbol{v}_2 = (3,-1)^t$. Eftersom $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är linjärt oberoende säger Sats 18.15 att A är diagonaliserbar, dvs $A = TDT^{-1}$. Substitutionen $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{z}$ ger att

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y}' = TDT^{-1}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow T^{-1}\boldsymbol{y}' = DT^{-1}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{z}' = D\boldsymbol{z} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1'(t) &= -4z_1(t) \\ z_2'(t) &= 4z_2(t) \end{cases}$$

som har lösningen $z_1 = c_2e^{-4t}$, $z_2 = c_2e^{4t}$. Allmän lösning är alltså $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{z}$, dvs

$$y_1 = c_1e^{-4t} + 3c_2e^{4t}, \qquad y_2 = c_1e^{-4t} - c_2e^{4t}.$$

Speciella lösningen är $y_1 = 7e^{-4t} - 3e^{4t}$ och $y_2 = 7e^{-4t} + e^{4t}$. $\square$