14. Minsta kvadratmetoden

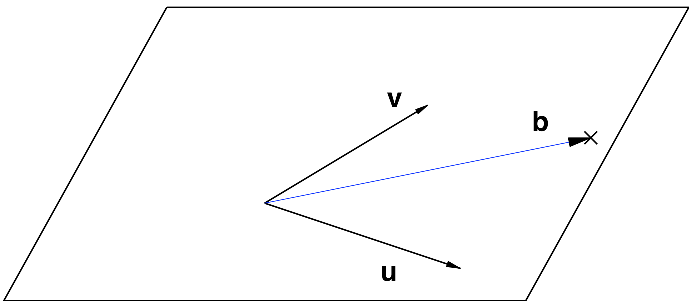
Exempel 14.1. Det är inte så svårt att komma åt en trasig lampa på golvet för att byta den. Det är bara att gå fram till den. Hur är det om lampan hänger i taket? Var ställer man sig för att komma så nära lampan som möjligt.

Lösning: Låt oss välja en av rummets punkter till origo och låt vektorerna $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ spänna upp golvet. Antag att lampan befinner sig i en punkt med ortsvektorn $\boldsymbol{b}$. Då kan problemet formuleras matematiskt som att söka lösning till ekvationssystemet

$$x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}.$$

Om lampan ligger på golvet, dvs $\boldsymbol{b}$ är en linjärkombination av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, så har ekvationssystemet en lösning. Då är det bara att gå fram till lampan.

Figur 14.2.



Om däremot lampan hänger högt upp i taket, betyder det att vektorn $\boldsymbol{b}$ inte är en linjärkombination av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, dvs ekvationssystemet

$$x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{14.2}$$

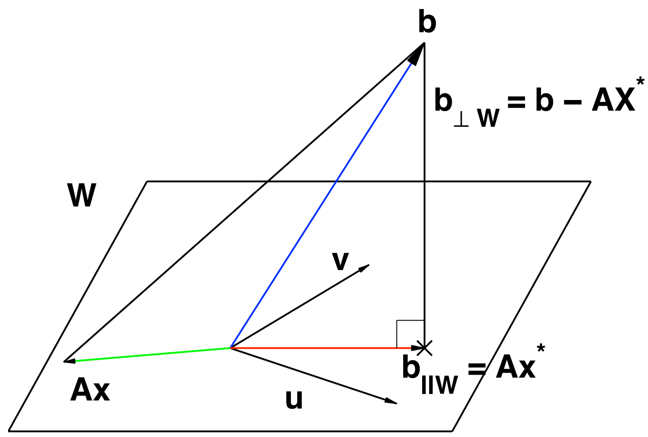
saknar lösning. Man söker självklart att minimera avståndet $|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$, dvs man ställer sig naturligtvis rakt under lampan.

Vi ska i det här avsnittet försöka ge svar på följande frågeställning:

Problem: Sök $\boldsymbol{x}^*$ så att $A\boldsymbol{x}^*$ blir **närmaste** vektorn till $\boldsymbol{b}$, dvs minimera avståndet (eller felet)

$$\|A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\|.$$

Figur 14.3.



Enligt Sats 12.25 och Anmärkning 12.26 löser tydligen den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{b}$ på planet vårt problem, ty den har kortast avstånd till $\boldsymbol{b}$.

Vi väljer $\boldsymbol{x}^*$ så att vektorn $\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*$ är ortogonal mot planet, dvs

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \cdot (A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) &= 0 \\ \boldsymbol{v} \cdot (A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) &= 0 \end{cases}$$

Vi skriver om skalärprodukten som en matrisprodukt i stället:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^t (A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) &= 0 \\ \boldsymbol{v}^t (A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) &= 0 \end{cases}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{u}^t - \\ -\boldsymbol{v}^t - \end{pmatrix} (A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) = \mathbf{0}.$$

I den första parentesen står alltså A :s kolonner $\boldsymbol{u}^t$ och $\boldsymbol{v}^t$ omställda som rader, dvs

$$A^t(A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow A^t A\boldsymbol{x}^* = A^t\boldsymbol{b}.$$

Definition 14.4. Sambandet

$$A^t A\boldsymbol{x}^* = A^t\boldsymbol{b} \tag{14.3}$$

kallas för **normalekvationen** och x^* för en **minsta kvadratlösning** till $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Observera: Matrisen A^tA är symmetrisk.

Anmärkning 14.5. Om ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saknar lösning, så kallar vi metoden för **minsta kvadratmetoden** förkortat MK-metoden när vi löser systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ via normalekvationen $A^tA\boldsymbol{x}^* = A^t\boldsymbol{b}$.

Vi går tillbaka till Exempel 14.1 och löser normalekvationen:

$$A^tA\boldsymbol{x}^* = A^t\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Förenkling ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Minsta kvadratlösningen till ekvationssystemet (14.2) är då $\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi beräknar också felet. Eftersom

$$\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

blir felet

$$\|A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\| = 1.$$

Nästa exempel visar kopplingen mellan MK-metoden och teorin för euklidiska rum. Många av exemplen vi har sett i euklidika rum kan lösas med hjälp av MK-metoden. I själva veket så är det Sats 12.22 vi använder när vi säger att vi använder MK-metoden. Men eftersom tillämpningar är många och viktiga så har metoden fått eget namn och ett eget kapitel.

Exempel 14.6. Låt

$$W = [(1,1,1,1)^t, (1,1,-1,-1)^t, (1,-1,1,-1)^t] \subset \mathbf{E^4}$$

och låt $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3)^t$ vara en godtycklig vektor i $\mathbf{E}^3$.

1. Bestäm med MK-metoden den ortogonala projektionen $P_W(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\|W}$.
2. Vilken vektor i W ligger närmast $(1,0,1,4)^t$?

Lösning: 1. Enligt MK-metoden så söker vi den vektor

$$\lambda_1(1,1,1,1)^t + \lambda_2(1,1,-1,-1)^t + \lambda_3(1,-1,1,-1)^t$$

i W som ligger närmast $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3)^t$, dvs

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Detta system saknar i allmänhet lösning eftersom $\boldsymbol{u}$ är godtycklig och behöver inte ligga i W. Vi bestämmer en minsta kvadratlösning

$$A^tA\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & (x_1+x_2+x_3+x_4)/4 \\ 0 & 4 & 0 & (x_1+x_2-x_3-x_4)/4 \\ 0 & 0 & 4 & (x_1-x_2+x_3-x_4)/4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & (x_1+x_2+x_3-x_4)/4 \\ \lambda_2 & = & (x_1+x_2-x_3-x_4)/4 \\ \lambda_3 & = & (x_1-x_2+x_3-x_4)/4 \end{array}\right.$$

Ortogonala projektionen $P_W(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\|W}$ av $\boldsymbol{u}$ på W ges av

$$\begin{aligned} P_W(\boldsymbol{u}) &= \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{x_1-x_2+x_3-x_4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x_1+x_2+x_3-x_4 \\ x_1+3x_2-x_3+x_4 \\ x_1-x_2+3x_3+x_4 \\ -x_1+x_2+x_3+3x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Av alla vektorer i W är $P_W(\boldsymbol{u}) = u_{\|W}$ den som ligger $\boldsymbol{u}$ närmast. Detta ger

$$P_W((1,0,1,4)^t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Jämför detta exempel med Exempel 12.35.

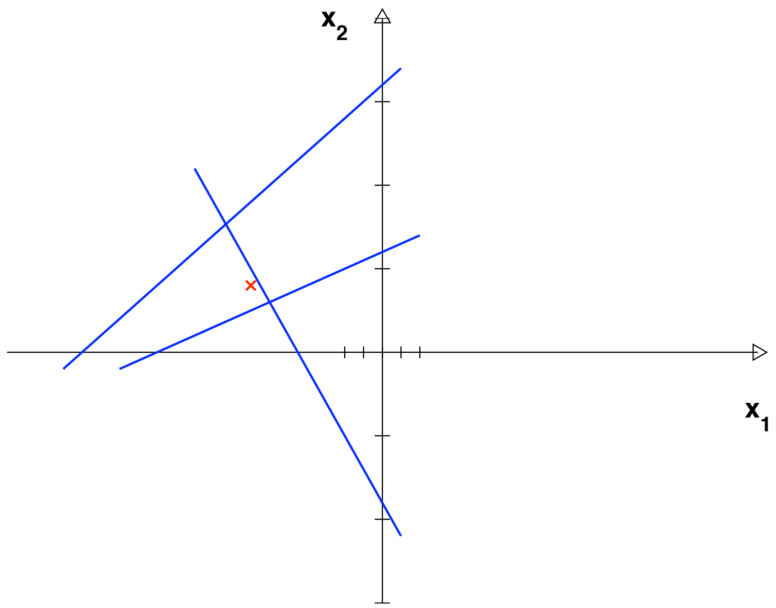
Exempel 14.7. Bestäm i minsta kvadratmening en lösning till $\begin{cases} -x_1 & + & x_2 & = & 16 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & -9 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & -12 \end{cases}$

Lösning: Vi börjar med att skriva systemet på matrisform och får

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -9 \\ -12 \end{pmatrix}, \text{ dvs } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Löser vi sen normalekvationen $A^t A\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b}$, får vi minsta kvadratlösningen
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Geometriska tolkningen av ekvationerna i systemet är räta linjer i planet och den sökta lösningen är därmed skärningspunkten mellan de tre linjerna.

Figur 14.8.



Exempel 14.9. Avgör för vilka värden på konstanten a som ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + 2y + az = -1 \end{cases}$$

saknar lösning. Bestäm för dessa värden på a en minsta kvadratlösning till ekvationssystemet.

Lösning: Systemet kan skrivas på matrisform $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi undersöker nu $\det A$. Vi har att

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0,\ a = 2.$$

Systemet har alltså entydig lösning för $a \neq 0, 2$. För $a = 0$ har systemet oändligt många lösningar. Medan för $a = 2$ saknar systemet lösning. För detta $a = 2$ bestämmer vi en minsta kvadratlösning till ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dvs en lösning till normalekvationen $A^t A\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b}$. Minsta kvadratlösningen är $(x, y, z) = t(0, -1, 1)$.

Exempel 14.10. Anpassa en rät linje, $y = kx + m$, på bästa möjliga sätt till följande mätdata:

x	-2	-1	0	1	2
y	1	5	2	7	10

Lösning: Sätter vi in mätdata i linjens ekvation får vi ekvationsystemet:

$$\begin{cases} -2k + m = 1 \\ -k + m = 5 \\ 0k + m = 2 \\ k + m = 7 \\ 2k + m = 10 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{dvs} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Lös normalekvationen $A^t A\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b}$ så fås $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dvs bästa linjen är $y = 2x + 5$.

Figur 14.11.