6.6. Tillämpningar

I exemplen nedan antar vi att $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ är en ON-bas i planet och $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ ett högerorienterat system i detta plan.

Exempel 6.39. Antag att $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en vektor i planet och låt matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Låt oss sätta i den 2×1 kolonnmatrisen $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ koordinaterna för vektorn $\boldsymbol{u}$. Då är multiplikationen mellan A och X väldefinierat och vi får

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För att tolka resutatet geometriskt kan vi tänka oss att kolonnmatrisen $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är koordinaterna för en vektor $\boldsymbol{v}$, dvs $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är lika långa och vinkeln mellan dem är $\frac{\pi}{2}$, dvs ortogonala. Man erhåller vektorn $\boldsymbol{v}$ genom att vrida 90° vektorn $\boldsymbol{u}$ moturs. För att övertyga sig om detta kan man se att

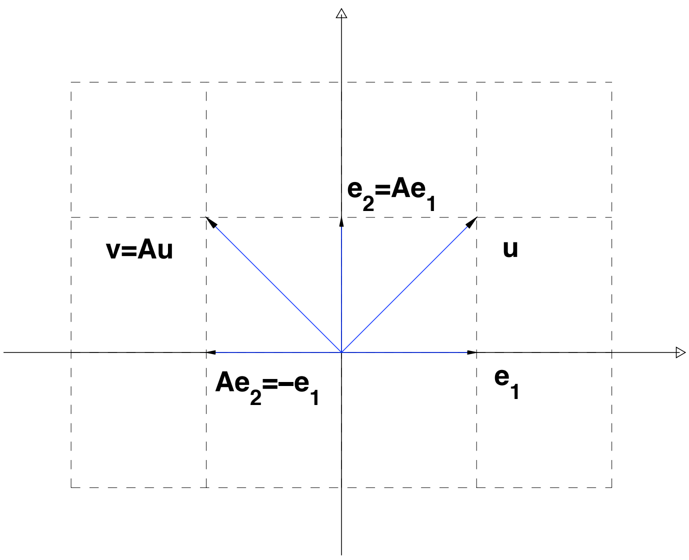
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dvs vektorn $\boldsymbol{e}_1$ vrids på $\boldsymbol{e}_2$ och att

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs vektorn $\boldsymbol{e}_2$ vrids på $-\boldsymbol{e}_1$.

Figur 6.40.



□

Exempel 6.41. Betrakta det parallellogram som spänns upp av kantvektorerna

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ multiplicerad med kolonnmatriserna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ som innehåller koordinaterna för vektorerna $\boldsymbol{u}$ respektive $\boldsymbol{v}$ ger

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

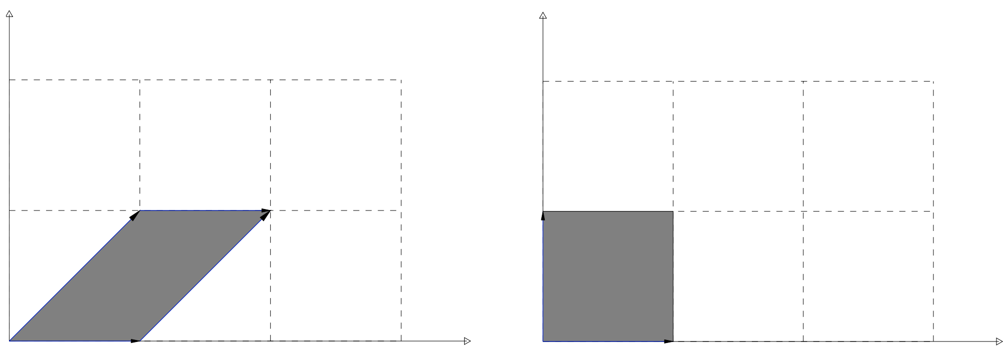
som är koordinaterna för vektorn $\boldsymbol{e}_1$ respektive

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

är koordinaterna för vektorn $\boldsymbol{e}_2$.

Vi ser alltså i (6.4) att vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avbildas på sig själv och enligt (6.5) avbildas $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ på vektorn $\boldsymbol{w} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Därmed kommer varje linjärkombination av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ avbildas på en linjärkombination av tillhörande bilder som är $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{w}$. Detta betyder att parallellogrammen kommer att avbildas på kvadraten, se figuren nedan.

Figur 6.42.



□

Exempel 6.43. Vi vet sen tidigare att kurvan $x^2 + y^2 = 1$ beskriver enhetscirkeln i planet; avståndet från varje punkt på cirkeln till origo är konstant och lika med radien 1.
Låt oss nu betrakta kurvan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6.6}$$

Avståndet nu från en punkt på kurvan till origo är inte längre konstant. T.ex., skär kurvan x-axeln i punkterna $(\pm a, 0)$ och y-axeln i $(0, \pm b)$. Kurvan är en cirkel som är ihoptryckt. Vi kallar kurvan för en **ellips**. Om vi sätter (dvs byter till polära koordinater)

$$\begin{cases} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{cases}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

så har en punkt på ellipsen koordinaterna $P = (a\cos\theta, b\sin\theta)$, ty

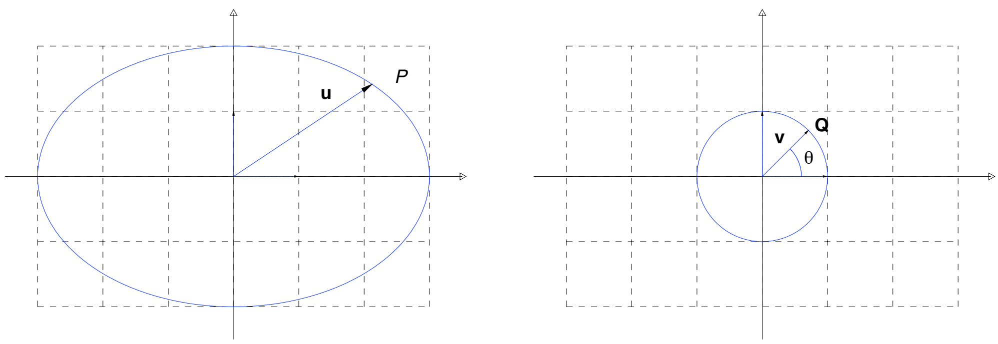
$$\text{VL} = \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 = \text{HL}.$$

Ortsvektorn till P är $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$. Multiplicerar vi matrisen $\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$ med kolonnmatrisen som innehåller koordinaterna för ortvektorn $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OP}$ får vi att

$$\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Detta är koordinater för ortsvektorn $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OQ}$ för punkten $Q = (\cos\theta, \sin\theta)$.
Punkten Q ligger på enhetscirkeln, ty $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Figur 6.44.



Vi ser alltså att matrisprodukten i (6.7) avbildar ellipsen i (6.6) på enhetscirkeln. □

Exempel 6.45. The International Standard Book Number, ISBN, är en kontroll digitalkod. T.ex., så har boken *Matematisk analys* av Forsling G. och Neymark M. ISBN nummret 91-47-05188-4. Vi lägger detta nummer i en kolonnmatris $(9, 1, 4, 7, 0, 5, 1, 8, 8, c)^t$ av ordning 10×1, där slutsiffran 4 är ersatt av konstanten c. Kolonnmatrisen kan betraktas innehålla koordinaterna för en vektor $\boldsymbol{u}$ givna i en ON-bas. Vi ska nu kontrollera att ISBN nummret är rätt geonom att kontrollera att slutsiffran $c = 4$. Låt $\boldsymbol{a}$ vara en vektor med koordinaterna $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)^t$ i en kolonnmatris av ordning 10×1. Kontrollen av att $c = 4$ går nu ut på att c ska kunna väljas så att skalärprodukten blir 0, dvs

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} = 0,$$

vilket ger

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} = 9 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 8 \cdot 9 + c \cdot 10 = 224 + 10c.$$

Eftersom det är bestämt att ett ISBN nummer skall vara 10-siffrigt, så räknar vi i moduler om 11, dvs vi räknar bara med talen $0, 1, \ldots, 10$. Talet 11 svarar alltså mot 0 och talet 12 svarar mot 1, 13 mot $2, \ldots, 22$ mot 0 osv.
Detta betyder att

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} = 224 + 10c = 20 \cdot 11 + 4 + 10c = 20 \cdot 11 + 4 + (11 - 1)c = (20 + c) \cdot 11 + 4 - c.$$

Eftersom $(20 + c) \cdot 11$ är ett heltal gånger 11, så svarar detta tal mot 0. Vi får därmed att

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} = 4 - c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4.$$

Detta visar att ISBN nummret är korrekt. $\square$

Exempel 6.46. The Universal Product Code, IPU, är en digitalkod för märkning. IPU nummret för samma litteratur ovan är 9 789147051885. En laserpenna läser in den svart-vita streckkoden och kontrollerar att det är ett IPU nummer. Idén är densamma som i fallet med ISBN. Vi lägger in detta nummer i en kolonnmatris $(9, 7, 8, 9, 1, 4, 7, 0, 5, 1, 8, 8, d)^t$ av ordning 13×1 som är koordinaterna för en vektor $\boldsymbol{v}$ och där slutsiffran 5 är ersatt av konstanten d. Kontrollvektorn $\boldsymbol{b}$ har här koordinaterna $(1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)^t$. Kontrollsiffran d ska vara sådan att

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Vi får att

$$9 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 8 \cdot 18 \cdot 3 + d \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$125 + d = 0.$$

Här räknar vi i moduler om 10, dvs endast med talen $0, 1, \ldots, 9$. Talet 10 svarar alltså mot 0 och talet 11 mot 1, 12 mot $2, \ldots, 20$ mot 0 osv.
Alltså, får vi att

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} = 125 + d = 12 \cdot 10 + 5 + d = 5 + d = 0,$$

om $d = 5$. IPU nummret är alltså rätt. $\square$