6.3. Matrisinvers

Vi har tidigare lärt oss addera och multiplicera matriser. Härnäst ska vi införa en operation som gör det möjligt att "*dela*" med vissa matriser.

Exempel 6.16. Betrakta följande linjära ekvationssystem:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Om vi inför

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kan systemet skrivas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{dvs} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Om A, $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{b}$ vore tal, skulle man kunna lösa ut $\boldsymbol{x}$ ur ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ genom att dela med A:

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{A}\boldsymbol{b} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Nedan skall vi lösa följande problem:

Problem: Hur delar man med en matris? Vad är **inversen** A^{-1} om A är en matris?

Lägg märke till att för reella tal A gäller

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1.$$

Definition 6.17. En matris av typen $n \times n$ kallas **kvadratisk** av **ordningen** n. En **enhetsmatris** är en kvadratisk matris E, som har ettor på huvuddiagonalen från övre vänstra hörnet till nedre högra hörnet.

Exempel 6.18. Matriserna

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

är enhetsmatriser av ordningen 2, 3 respektive 4. □

Exempel 6.19. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Då är

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

och

$$AE = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

En enhetsmatris fungerar alltså som en etta vid multiplikation. □

Definition 6.20. En kvadratisk matris kallas **inverterbar**, om det finns en kvadratisk matris B av samma ordning så att

$$AB = BA = E.$$

Matrisen B kallas i så fall en invers till A. Inversen till matrisen A betecknas A^{-1}.

Följande sats visar att en matris kan ha högst en invers.

Sats 6.21. Om B och C är inverser till A, så är $B = C$.

Bevis: Antag att B och C är inverser till A, dvs $AC = E$ och $BA = E$, så gäller att

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

□

Sats 6.22. Räknelagar för invers. Om A och B är inverterbara matriser, så gäller att

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ och $\lambda \neq 0$
4. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Bevis: Antag A och B är inverterbara.

1. Eftersom $AA^{-1} = E$, så är A invers till A^{-1}, dvs $A = (A^{-1})^{-1}$.
2. Eftersom $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = E$, så är $B^{-1}A^{-1}$ invers till AB, dvs $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(\lambda A)^{-1} = (\lambda EA)^{-1} = A^{-1}(\lambda E)^{-1} = A^{-1}\dfrac{1}{\lambda}E = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.
4. Eftersom $E = E^t = (A^{-1}A)^t = A^t(A^{-1})^t$, så är A^t invers till $(A^{-1})^t$, dvs $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

$\square$

Exempel 6.23. Visa att matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ har inversen $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi behöver bara visa att $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Eftersom A (och därmed A^{-1}) är en 2×2-matris, så är produkten $AA^{-1} = C$ också en 2×2-matris. Vi vill visa att $C = E$. Vi har att

$$AA^{-1} = C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

där

$$\begin{aligned}
c_{11} &= (\text{rad 1 i } A) \times (\text{kolonn 1 i } A^{-1}) &&= 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) &&= 1,\\
c_{12} &= (\text{rad 1 i } A) \times (\text{kolonn 2 i } A^{-1}) &&= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (1) &&= 0,\\
c_{21} &= (\text{rad 2 i } A) \times (\text{kolonn 1 i } A^{-1}) &&= 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) &&= 0,\\
c_{11} &= (\text{rad 2 i } A) \times (\text{kolonn 2 i } A^{-1}) &&= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (1) &&= 1,
\end{aligned}$$

dvs $C = E$ och A^{-1} är invers till A ovan. $\square$

Exempel 6.24. Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ om den existerar.

Lösning: Vi söker alltså en matris $B = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ som uppfyller

$$AB = E \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Genom att jämföra kolonnerna i varje led så kan detta ses som två mindre ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom det är samma matris i vänstra leden så leder detta till samma radoperationer i båda systemen. Detta utnyttjar vi genom att ställa båda höger leden $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bredvid varandra i ett utökat system

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

Eftersom vi nu har fått enhetsmatrisen i vänstra ledet i det utökade systemet, så innebär det att vi har erhållit inversen i högra ledet. vi har alltså att

$$B = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Exempel 6.25. Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ om den existerar.

Lösning: Enligt exemplet ovan så bestämmer vi inversen till matrisen A genom att lösa det utökade systemet

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Systemet saknar lösning och vi har inte kunnat lösa alla obekanta elemnet x_{ij} i den inversa matrisen B. Vi säger att matrisen saknar invers. □

Allmänt gäller följande om hur vi bestämmer inversen till en given kvadratisk matris.

Exempel 6.26. Antag att vi vill bestämma inversen till en kvadratisk $n \times n$-matris A. Vi söker alltså en kvadratisk $n \times n$-matris B, så att

$$AB = E.$$

Kalla de n-kolonner B har för X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, dvs $B = (X_1\ X_2\ \ldots\ X_n)$. Kalla också kolonnerna i enhetsmatrisen E för E_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, dvs $E = (E_1\ E_2\ \ldots\ E_n)$. Eftersom

$$AB = E \Leftrightarrow A(X_1\ X_2\ \ldots\ X_n) = (E_1\ E_2\ \ldots\ E_n) \Leftrightarrow AX_j = E_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

så är problemet att bestämma inversen B detsamma som att lösa n stycken ekvationssytem i de obekanta kolonnerna X_j. Koeficientmatrisen är alltid A men att högerledet är $E : j$ i varje ekvation $j = 1, 2, \ldots, n,$. Eftersom vi använder Gausselimination vid lösning av dessa ekvationer, så är det samma radoperationer i alla dessa, ty A är ju detsamma. Vi skulle kunna lösa de n stycken ekvationssystemen effektivare genom att ställa de som högerled bredvid varandra i ett *utökat* ekvationssytem:

$$AB = E \Leftrightarrow A(X_1\ X_2\ \ldots\ X_n) = (E_1\ E_2\ \ldots\ E_n).$$

Om A är inverterbar, dvs B existerar, så kommer vi att få enhetsmatrisen i vänstraledet och inversen B i högraledet av det utökade systemet:

$$(A|E) \Leftrightarrow (E|A^{-1}).$$

Annars har vi misslyckats och det beror på att A saknar invers. □

Exempel 6.27. Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ om den existerar.

Lösning: Enligt Exempel 6.26, så bestämmer vi inversern genom att lösa det utökade systemet

$$(A|E) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Vi försöker genom radoperationer se till att vi har enhetsmatrisen i vänstra ledet där A står. Vi börjar med att skaffa nollor under diagonalen

$$(A|E) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 1 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (E|A^{-1}).$$

Alltså är A inverterbar med inversen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

En kontroll visar att $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. □