

### 16.7. Nollrum, värderum och dimensionssatsen

**Definition 16.36.** Låt  $F : V \rightarrow W$  vara en linjär avbildning.

1. **Nollrummet** till  $F$  definieras vi som mängden av alla  $\mathbf{u} \in V$  som avbildas på nollvektorn, dvs  $F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ . Nollrummet betecknas med  $N(F)$ .
2. **Värderummet** till  $F$  definieras vi som mängden av alla bilder  $\mathbf{v} \in W$ , dvs  $\mathbf{v} = F(\mathbf{u})$  för något  $\mathbf{u} \in V$ . Värderummet betecknas med  $V(F)$ .

**Exempel 16.37.** a) I Exempel 16.14 hade vi en ortogonal projektion  $P : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  på planet  $W : 2x - y - 2z = 0$ . Vi såg då att inga andra vektorer än dem som är parallella med normalen, dvs  $\lambda \mathbf{n}$ , avbildades på nollvektorn, dvs  $P(\lambda \mathbf{n}) = \lambda P(\mathbf{n}) = \mathbf{0}$ . Alltså är

$$N(P) = \{\lambda \mathbf{n}; \lambda \in \mathbf{R}\} = [\mathbf{n}] \quad \text{och} \quad \dim N(P) = 1.$$

Vidare gäller att eftersom alla projektioner ligger i planet  $W$ , så är

$$V(P) = \{\mathbf{v} = P(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathbf{R}^3\} = \text{mängden av all bilder under } P = W.$$

Vi ser också att  $\dim V(P) = \dim W = 2$ .

b) I Exempel 16.17 hade vi en spegling  $S : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  i planet  $W$ . I det här fallet fanns det inga vektorer som avbildades på nollvektorn. Självklart avbildas alltid nollvektorn på sig själv. Alltså är

$$N(S) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{och} \quad \dim N(S) = 0.$$

Eftersom varje vektor i rummet  $\mathbf{v}$  är en spegelbild av något  $\mathbf{u}$ , dvs  $\mathbf{v} = S(\mathbf{u})$ , för något  $\mathbf{u}$ , så gäller att

$$V(S) = \mathbf{R}^3 \quad \text{och} \quad \dim V(S) = 3.$$

c) I Exempel 16.28 hade vi rotation  $R$  moturs en vinkel  $\theta$  kring en axel parallell med  $\mathbf{e}_3$ . Eftersom ingen annan vektor än nollvektorn vrids på nollvektorn, så har vi att

$$N(R) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{och} \quad \dim N(R) = 0.$$

Vidare, eftersom varje vektor  $\mathbf{v}_{bild}$  i rummet är en vektor  $\mathbf{v}_{urbild}$  vriden moturs vinkeln  $\theta$ , så kan ur bilden  $\mathbf{v}_{urbild}$  fås genom att vrida  $\mathbf{v}_{bild}$  vinkeln  $\theta$  medurs. Alltså följer att

$$V(R) = \mathbf{R}^3 \quad \text{och} \quad \dim V(R) = 3.$$

□

**Exempel 16.38.** Låt  $\{e_1, e_2, e_3\}$  vara en ON-bas i rummet och låt  $F$  vara en linjär avbildning med avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visa att vektorn

1.  $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \in N(F)$ .

2.  $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \in V(F)$ .

**Lösning:** 1. Vektorn  $\mathbf{u} = \underline{e}(2, -1, -1)^t \in N(F)$ , ty

$$F(\mathbf{u}) = F(\underline{e}(2, -1, -1)^t) = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Alltså, vektorn  $\mathbf{u}$  ligger i  $N(F)$ .

2. Bilden  $\mathbf{v} = \underline{e}(2, -1, 2)^t \in V(F)$  om det finns en urbild  $\mathbf{u} = \underline{e}X$ , sådan att

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{v}.$$

Nu gäller det att

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \Leftrightarrow \underline{e}AX = \underline{e}(2, -1, 2)^t \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs  $\mathbf{u} = \underline{e}(3, -1, 0)^t$ . Detta visar att  $\mathbf{v} \in V(F)$ . □

**Exempel 16.39.** Låt avbildningen  $F$  och matrisen  $A$  vara som i Exempel 16.38. Vi har sett att vektorn  $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \in N(F)$  och  $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \in V(F)$ . Frågor som vi ska besvara i det här exemplet är

1. Finns det fler vektorer än  $\mathbf{u}$  i  $N(F)$ ? Kan vi bestämma  $N(F)$ ?
2. Hur ser  $V(F)$  ut? Vad beskriver det geometriskt och vad är dess dimension?

**Lösning:** 1. Nollrummet  $N(F)$  består av alla vektorer  $\mathbf{u} = \underline{e}X$  som under  $F$  avbildas på nollvektorn, dvs

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow F(\underline{e}X) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \underline{e}AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow AX = \mathbf{0}.$$

Löser vi ekvationssystemet får vi

$$AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow X = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser alltså att  $N(F)$  spänns upp av endast vektorn  $\mathbf{u} = \underline{e}(2, -1, -1)^t$ . Detta betyder att  $\dim N(F) = 1$  och att  $N(F)$  är en rät linje genom origo, se Figur 16.40.

2. Vi har definierat  $V(F)$  som mängden av alla bilder  $\mathbf{v}$  under  $F$ , dvs mängden av alla  $\mathbf{v}$  för vilka det finns en Urbild  $\mathbf{u}$ , dvs om  $F(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ . Om Urbilden är  $\mathbf{u} = \underline{e}X = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$  och bilden är  $\mathbf{v} = \underline{e}Y$ , så gäller att

$$\mathbf{v} = F(\mathbf{u}) \Leftrightarrow \mathbf{v} = F(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) \Leftrightarrow \mathbf{v} = x_1F(\mathbf{e}_1) + x_2F(\mathbf{e}_2) + x_3F(\mathbf{e}_3). \quad (16.11)$$

Vi ser att bildvektorn  $\mathbf{v} \in V(F)$  är en linjärkombination av bilden av basvektorerna  $F(\mathbf{e}_1)$ ,  $F(\mathbf{e}_2)$  och  $F(\mathbf{e}_3)$ . Eftersom vektorn  $\mathbf{v}$  är godtycklig i  $V(F)$  följer att

$$V(F) = [F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), F(\mathbf{e}_3)].$$

Låt oss undersöka om vektorerna är linjärt beroende eller inte. Det gäller att

$$\lambda_1F(\mathbf{e}_1) + \lambda_2F(\mathbf{e}_2) + \lambda_3F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Lösningen till detta system är således  $\lambda_1 = 2t$ ,  $\lambda_2 = -t$  och  $\lambda_3 = -t$ . Vi har alltså

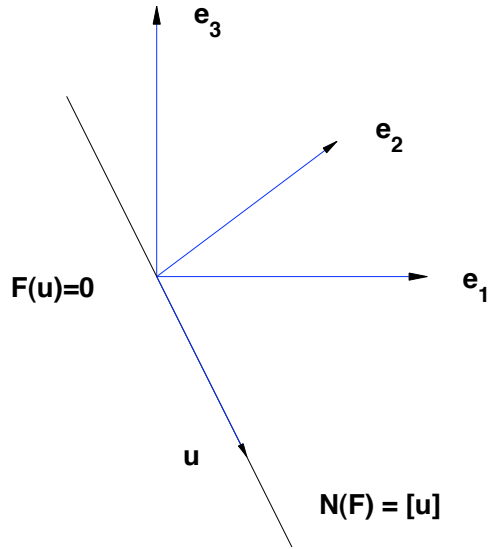
$$2tF(\mathbf{e}_1) - tF(\mathbf{e}_2) - tF(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0} \Leftrightarrow F(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}(F(\mathbf{e}_2) + F(\mathbf{e}_3)).$$

Vi ser nu att  $\dim V(F) = 2$  och underrummet  $V(F) = [F(\mathbf{e}_2), F(\mathbf{e}_3)]$  är ett plan genom origo, se Figur 16.41. En normal till detta plan är t.ex.

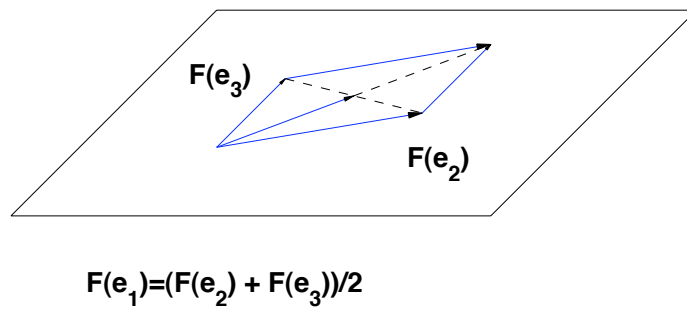
$$F(\mathbf{e}_2) \times F(\mathbf{e}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Geometriskt är underrummet  $V(F) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 : x_1 - x_3 = 0\}$ , se Figur 16.42. □

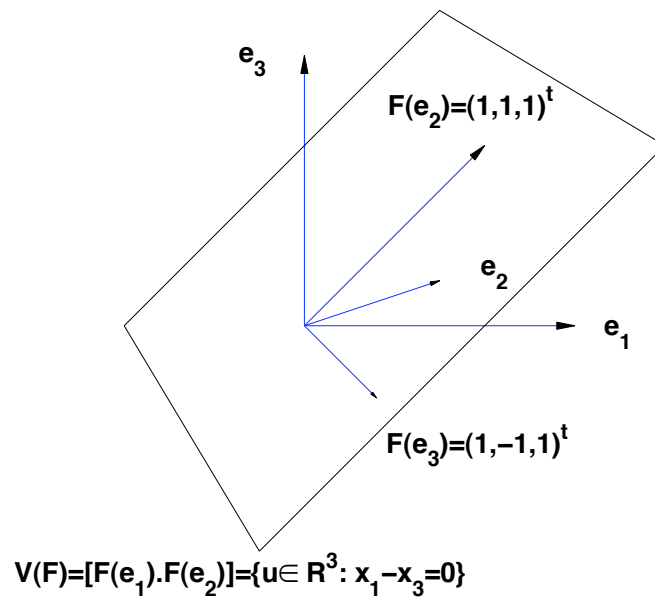
Figur 16.40.



Figur 16.41.



Figur 16.42.



Vi såg i uttrycket (16.11) i exemplet ovan att varje bildvektor i värderummet till en linjär avbildning är en linjärkombination av bilden av basvektorerna. Detta är bl.a. innebörden av nästa sats.

**Sats 16.43.** Antag att  $F : V \rightarrow W$  är linjär.

1. Nollrummet  $N(F)$  är ett underrum av  $V$ .
2. Värderummet  $V(F)$  är ett underrum av  $W$ .
3. Om  $V = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$  så  $V(F) = [F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), \dots, F(\mathbf{e}_n)]$ .

**Bevis:** 1. Låt  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in N(F) \subseteq V$ , dvs  $F(\mathbf{u}_1) = F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$ . Då gäller att

$$F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$$

och

$$F(\lambda\mathbf{u}_1) = \lambda F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0},$$

dvs  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in N(F)$  och  $\lambda\mathbf{u}_1 \in N(F)$ . Därmed är  $N(F)$  ett underrum i  $V$ .

2. Om bilderna  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V(F) \subseteq W$ , så finns det urbilder  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ , så att  $\mathbf{v}_1 = F(\mathbf{u}_1)$  respektive  $\mathbf{v}_2 = F(\mathbf{u}_2)$ . Det följer att

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2),$$

dvs  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V(F)$  samt att

$$\lambda\mathbf{v}_1 = \lambda F(\mathbf{u}_1) = F(\lambda\mathbf{u}_1),$$

dvs  $\lambda\mathbf{v}_1$  har urbilden  $\lambda\mathbf{u}_1$ , dvs  $\lambda\mathbf{v}_1 \in V(F)$ . Vi har därmed visat att  $V(F)$  är ett underrum i  $W$ .

3. Låt  $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$  vara en godtycklig vektor i  $V$  med bilden  $\mathbf{v}$  under  $F$ , dvs  $F(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ . Då gäller att

$$\mathbf{v} = F(\mathbf{u}) = F(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1F(\mathbf{e}_1) + x_2F(\mathbf{e}_2) + \dots + x_nF(\mathbf{e}_n),$$

dvs varje  $\mathbf{v} \in V(F)$  är en linjärkombination av mängden  $\{F(\mathbf{e}_1), \dots, F(\mathbf{e}_n)\}$ . Vi har alltså visat att  $V(F) = [F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), \dots, F(\mathbf{e}_n)]$ .  $\square$

Vi har i exemplen ovan också sett att det finns ett samband mellan  $\dim N(F)$  och  $\dim V(F)$  och nästa sats bekräftar detta.

**Sats 16.44. Dimensionssatsen:** Antag att  $F : V \rightarrow W$  är linjär. Då gäller att

$$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim V.$$

**Bevis:** Antag att  $\dim V = n$  och att  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  är en bas i  $V$ . Antag också att  $\dim N(F) = k$  och att  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  är en bas i  $N(F)$ . Vi vill visa att

$$\dim V(F) = \dim V - \dim N(F).$$

Enligt Sats 16.43, så gäller att

$$V(F) = [F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_n)].$$

Eftersom

$$F(e_1) = F(e_2) = \dots = F(e_k) = \mathbf{0},$$

följer att

$$V(F) = [F(e_{k+1}), F(e_{k+2}), \dots, F(e_n)]. \quad (16.12)$$

Vi visar nu att mängden i (16.12) som spänner upp  $V(F)$  är linjärt oberoende, ty

$$\lambda_{k+1}F(e_{k+1}) + \lambda_{k+2}F(e_{k+2}) + \dots + \lambda_n F(e_n) = \mathbf{0} \Leftrightarrow F(\lambda_{k+1}e_{k+1} + \lambda_{k+2}e_{k+2} + \dots + \lambda_n e_n) = \mathbf{0},$$

dvs  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n \in N(F)$ , vilket är en motsägelse. Mängden av  $(n - k)$  vektorer  $\{F(e_{k+1}), F(e_{k+2}), \dots, F(e_n)\}$  i (16.12) som spänner upp  $V(F)$  är alltså linjärt oberoende. Därmed är

$$\dim V(F) = n - k = \dim V - \dim N(F),$$

dvs

$$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim V.$$

□

**Exempel 16.45.** Den linjära avbildningen  $F$  har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en bas för underrummen  $N(F)$ ,  $V(F)$  och  $N(F) \cap V(F)$ . Avgör också om  $(1, 4, 2)^t \in V(F)$ ?

**Lösning:** 1. Nollrummet  $N(F)$  är alla  $\mathbf{u} = \underline{e}X$  som under  $F$  avbildas på nollvektorn, dvs

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow F(\underline{e}X) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \underline{e}AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow AX = \mathbf{0}.$$

Vi löser ekvationssystemet

$$AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså spänns  $N(F)$  endast upp av vektorn  $\mathbf{u} = \underline{e}(1, 1, 0)^t$ , dvs  $N(F) = [(1, 1, 0)^t]$  är en rät linje genom origo med  $\dim N(F) = 1$ .

2. Dimensionssatsen

$$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim \mathbf{R}^3$$

ger att  $\dim V(F) = 2$ . Eftersom  $V(F)$  spänns upp av bilden av basvektorerna,

$$V(F) = [F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), F(\mathbf{e}_3)]$$

måste en bildvektor bort då den är linjärkombination i de övriga. Det får bli  $F(\mathbf{e}_2)$  som är parallell med  $F(\mathbf{e}_1)$ . Alltså har vi att

$$V(F) = [F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_3)] = [(1, 1, 0)^t, (1, 1, 1)^t]$$

som är ett plan genom origo. Normalen till  $V(F)$  ges av  $(1, 1, 0)^t \times (1, 1, 1)^t = (1, -1, 0)^t$ , så att

$$V(F) = [(1, 1, 0)^t, (1, 1, 1)^t] = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}.$$

3. Snittmängden  $N(F) \cap V(F)$  består av alla vektorer som ligger i både  $N(F)$  och  $V(F)$ . Eftersom  $N(F) = [(1, 1, 0)^t]$  och  $(1, 1, 0)^t \in V(F)$ , så är  $N(F) \cap V(F) = [(1, 1, 0)^t]$ .

4. Vektorn  $(1, 4, 2)^t \notin V(F)$  ty den satisfierar inte ekvationen  $x_1 - x_2 = 0$ . □