8.3. Entydighet hos determinanten

Följande resultat visar att det finns **högst** en determinant som uppfyller egenskaperna 1., 2., och 3. i Definition 8.4.

Sats 8.6. Antag att $D_1(A)$ och $D_2(A)$ är två determinanter definierade för alla $n \times n$ matriser A och båda har egenskaperna 1. och 2. i Definition 8.4. Om

$$D_1(E) = D_2(E),$$

så följer att $D_1(A) = D_2(A)$ för varje A.

Bevis: Bilda differensen $\Delta A = D_1(A) - D_2(A)$. Då uppfyller ΔA också villkoren 1. och 2. i Definition 8.4. Dessutom gäller att

$$\Delta E = D_1(E) - D_2(E) = 0. \tag{8.2}$$

Eftersom kolonnerna A_k i A kan skrivas som en linjärkombination av kolonnerna $E_1, E_2, \ldots, E_n$ i enhetsmatrisen E

$$A_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jk} E_j,$$

så följer att

$$\begin{aligned} \Delta A &= \Delta(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \Delta\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{j1} E_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j2} E_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jn} E_j\right) \\ &= \sum \lambda_{j_1 1} \lambda_{j_2 2} \cdots \lambda_{j_n n} \Delta(E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}) \end{aligned}$$

där summan är över alla $j_1, j_2, \ldots, j_n$ som är heltal mellan 1 och n. Om två j_k är lika så följer av egenskap 2. att

$$\Delta(E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}) = 0.$$

Om inte två j_k är lika så kan vi byta plats på E:na till en kostnad av ett teckenbyte så att

$$\Delta(E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}) = \pm\Delta(E_1, E_2, \ldots, E_n) = \Delta E = 0,$$

enligt (8.2). $\square$