19. Spektralsatsen

19.1. Spektralsatsen

Symmetriska avbildningar är en viktig klass av linjära avbildningar. Vi kommer nedan att formulera ett antal viktiga resultat för dessa avbildningar på eukilidiska rum.

Sats 19.1. Antag att $\mathbf{E}$ är ett ändligt dimensionellt euklidiskt rum och antag också att $F : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ är en symmetrisk linjär avbildning på $\mathbf{E}$. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är egenvektorer till F med skilda egenvärden, så är $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ ortogonola, dvs $(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = 0$.

Bevis: Enligt förutsättningen så följer att

$$F(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u} \qquad \text{och} \qquad F(\boldsymbol{v}) = \mu\boldsymbol{v}.$$

Vi multiplicerar med $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ och utnyttjar att F är symmetrisk:

$$\lambda(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = (F(\boldsymbol{u})|\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}|F(\boldsymbol{v})) = \mu(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}),$$

dvs

$$(\lambda - \mu)(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = 0.$$

Eftersom vi antog att λ och μ var skilda, dvs $\lambda \neq \mu$, så följer att $(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = 0$. □

Sats 19.2. Antag att $\mathbf{E}$ är ett ändligt dimensionellt euklidiskt rum och antag också att $F : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ är en symmetrisk linjär avbildning på $\mathbf{E}$. Om $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor till F och $\boldsymbol{u}$ är ortogonal mot $\boldsymbol{v}$, så är även $F(\boldsymbol{u})$ ortogonal mot $\boldsymbol{v}$.

Bevis: Eftersom

$$F(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$$

och

$$(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = 0,$$

så följer att

$$(F(\boldsymbol{u})|\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}|F(\boldsymbol{v})) = \lambda(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

□

Sats 19.3. Om F är symmetrisk och A är dess symmetriska matris i en ON-bas, så är samtliga rötter till sekularekvationen

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

reella.

Bevis: Eftersom sekularekvationen är ett n:te gradspolynom med reella koefficienter vet vi att om λ är en rot, så är även konjugatet $\overline{\lambda}$ också en rot. Antag nu att λ är ett egenvärde till F med tillhörande egenvektor $\boldsymbol{v}$, dvs $F(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$. Tar vi nu konjugatet så får vi

$$\overline{F(\boldsymbol{v})} = \overline{\lambda\boldsymbol{v}} \qquad \Leftrightarrow \qquad F(\overline{\boldsymbol{v}}) = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}},$$

dvs $\overline{\lambda}$ är ett egenvärde till F med tillhörande egenvektor $\overline{\boldsymbol{v}}$. Eftersom F är symmetrisk så följer att

$$0 = (F(\boldsymbol{u})|\overline{\boldsymbol{v}}) - (\boldsymbol{u}|F(\overline{\boldsymbol{v}})) = \lambda(\boldsymbol{u}|\overline{\boldsymbol{v}}) - \overline{\lambda}(\boldsymbol{u}|\overline{\boldsymbol{v}}) = (\lambda - \overline{\lambda})(\boldsymbol{v}|\overline{\boldsymbol{v}}) = (\lambda - \overline{\lambda})\|\boldsymbol{v}\|^2.$$

Alltså är $\lambda = \overline{\lambda}$, dvs λ är reell. □

Sats 19.4. Låt $\underline{\boldsymbol{e}}$ vara en ON-bas för ett euklidiskt rum $\mathbf{E}$ med $\dim \mathbf{E} = n$ och låt också $F : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ vara en linjär avbildning på $\mathbf{E}$. Om F har en symmetrisk matris A, dvs

$$A^t = A$$

i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$, så är F:s matris symmetrisk i varje annan ON-bas.

Bevis: Låt $\underline{\boldsymbol{f}}$ vara en annan ON-bas i $\mathbf{E}$. Då gäller bassambandet $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$, där T är ortogonal. Enligt sambandet för avbildningsmatriser i Sats 16.51 $A_{\boldsymbol{f}} = TA_{\boldsymbol{e}}T^t$ samt reglerna för transponat, så följer att

$$A_{\boldsymbol{f}}^t = (TA_{\boldsymbol{e}}T^t)^t = (T^t)^t A_{\boldsymbol{e}}^t T^t = TA_{\boldsymbol{e}}T^t = A_{\boldsymbol{f}}.$$

Alltså är $A_{\boldsymbol{f}}$ symmetrisk. □

Omvändingen till resultatet i Sats 19.4 är vad som kallas för **Spektralsatsen** och är ett av de viktigaste resultaten i linjär algebra. Men för att visa spektralsatsen behöver vi först följande hjälpsats.

Sats 19.5. Låt $\mathbf{E}$ vara ett euklidiskt rum, $\dim \mathbf{E} = n < \infty$. Låt också $\boldsymbol{e} \in \mathbf{E}$ sådant att $\|\boldsymbol{e}\| = 1$. Sätt

$$W = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{E} : \ (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{e}) = 0\}.$$

Då är W ett underrum till $\mathbf{E}$ och $\dim W = \dim \mathbf{E} - 1$.

Bevis: W är ett underrum: Om $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W$, dvs $(\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{e}) = 0 = (\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{e})$, så är

1. $(\lambda\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{e}) = \lambda(\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{e}) = 0$.
2. $((\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)|\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{e}) = 0$.

Alltså $(\lambda\boldsymbol{v}_1) \in W$ och $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \in W$ och därmed är W ett underrum till $\mathbf{E}$. Vidare gäller att vi kan dela upp $\boldsymbol{v} \in E$ enligt

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\boldsymbol{v}_{\|\boldsymbol{e}}}_{\lambda\boldsymbol{v}} + \underbrace{\boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{e}}}_{\|W}.$$

Om $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ är en ON-bas i W så är $\boldsymbol{v}_{\|W} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots \lambda_k\boldsymbol{e}_k$ och

$$\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} + \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots \lambda_k\boldsymbol{e}_k.$$

Därmed är $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ en ON-bas för V. Alltså är $k + 1 = n$, dvs $k = n - 1$. □

Sats 19.6. Spektralsatsen: Låt $\mathbf{E}$ vara ett euklidiskt rum, $\dim \mathbf{E} = n < \infty$. Antag att $F : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ är en symmetrisk linjär avbildning på $\mathbf{E}$. Då har $\mathbf{E}$ en ON-bas bestående av egenvektorer till F.

Bevis: Vi använder induktion över $\dim V = n$.

I. Satsen är sann då $n = 1$, ty om $\boldsymbol{e}_1$ är en ON-bas för V, så är ju $F(\boldsymbol{e}_1) = t\boldsymbol{e}$ för något reellt t, dvs $\boldsymbol{e}_1$ är en egenvektor till F.

II. Antag att satsen är sann för alla euklidiska rum av dimmension n.

III. Antag att $\mathbf{E}$ är euklidiskt, $\dim \mathbf{E} = n + 1$. Antag också att en symmetrisk linjär avbildning F på $\mathbf{E}$ har i någon ON-bas till $\mathbf{E}$ matrisen A. Enligt algebrans fundamentalsats har sekularekvationen $\det(A - \lambda E)$ minst ett komplext nollställe. Enligt Sats 19.3 är detta nollställe reellt. Kalla tillhörande egenvektor efter normering för $\boldsymbol{e}$.
Sätt nu $W = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{E} : \ (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{e}) = 0\}$. Då är W ett euklidiskt rum med samma skalärprodukt som i V. Vidare är restriktionen av F till W en symmetrisk linjär avbildning på W, ty om vi sätter $F_W(\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{v})$ för varje $\boldsymbol{v} \in W$, så är F_W symmetrisk eftersom F är det.

Dessutom följer att

$$(F_W(\boldsymbol{v})|\boldsymbol{e}) = (F(\boldsymbol{v})|\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{v}|F(\boldsymbol{e})) = (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{e}) = 0,$$

dvs $F_W(\boldsymbol{v}) \in W$. Av Sats 19.5 följer att $\dim W = \dim \mathbf{E} - 1 = n - 1$. Enligt induktionsantagandet i II. har W en ON-bas $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ bestående av egenvektorer till F_W. Eftersom $F = F_W$ på W är dessa egenvektorer också till F. Då $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ är ortogonala mot egenvektorn $\boldsymbol{e}$ till F bildar dessa tillsammans med $\boldsymbol{e}$ en ON-bas $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{nn-1}$ bestående av egenvektorer till F för $\mathbf{E}$. □

Lägg märke till att vi i Sats 18.8 har sett att om F har en bas av egenvektorer, så är F:s matris i denna bas en diagonalmatris.

Detta motiverar att vi skriver *Spektralsatsen på matrisform*:

Sats 19.7. Om A är en symmetrisk matris, så finns det en ortogonal matris T och en diagonalmatris D, så att

$$A = TDT^t \qquad \Leftrightarrow \qquad D = T^t AT,$$

dvs symmetriska matriser är diagonaliserbara.

Bevis: Eftersom A är symmetrisk, så följer av Sats 18.15 att

$$A = TDT^{-1},$$

Matrisen T innehåller i sina kolonner en ON-bas av egenvektorer till A och matrisen D innehåller egenvärdena på diagonalen och noll för övrigt. Av spektralsatsen följer att egenvektorerna bildar en ON-bas och i så fall följer av Sats 16.48 att transformationsmatrisen T är ortogonal. Detta betyder

$$A = TDT^t.$$

□

Anmärkning 19.8. Satserna 19.4 och 19.5 visar att om F är en linjär avbildning på ett ändligt dimmensionellt rum $\mathbf{E}$, så är

$$F \text{ symmetrisk } \Leftrightarrow F \text{ har en ON-bas av egenvektorer i } \mathbf{E}.$$

Exempel 19.9. Antag att $F : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ är en linjär avbildning som i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ har avbildningsmatrisen

$$A_{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Bestäm en bas $\underline{\boldsymbol{f}}$ för $\mathbf{E}^2$ bestående av egenvektorer till F.
2. Bestäm bassambandet samt sambandet mellan avbildningsmatriserna $A_{\boldsymbol{e}}$ och $A_{\boldsymbol{f}}$.
3. Beräkna $A_{\boldsymbol{e}}^3$, $A_{\boldsymbol{e}}^{-1}$ och $\lim_{n\to\infty} A_{\boldsymbol{e}}^n$.

Lösning: 1. Eftersom matrisen $A_{\boldsymbol{e}}$ är symmetrisk följer av spektralsatsen att $A_{\boldsymbol{e}}$ är diagonaliserbar. Dessutom bildar egenvektorerna en ON-bas för planet. Egenvärdena är $\lambda_1 = 1/2$ och $\lambda_2 = 1$ med tilhörande egenvektorer $\boldsymbol{f}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Bassambandet ger $A_{\boldsymbol{e}} = TDT^t$, där $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ är ortogonal.

3. Vidare gäller att

$$A_{\boldsymbol{e}}^3 = (TDT^t)(TDT^t)(TDT^t) = TD(T^tT)D(T^tT)DT^t = TD^3T^t.$$

Eftersom $D^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2^3 & 0 \\ 0 & 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, så är

$$A_{\boldsymbol{e}}^3 = TD^3T^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2^3} & 1-\frac{1}{2^3} \\ 1-\frac{1}{2^3} & 1+\frac{1}{2^3} \end{pmatrix}.$$

Lagarna för matrisinvers ger

$$\begin{aligned} A_{\boldsymbol{e}}^{-1} &= (TDT^t)^{-1} = (T^t)^{-1}D^{-1}T^{-1} = TD^{-1}T^t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

På samma sätt som i c) gäller att om n är ett heltal så

$$A_{\boldsymbol{e}}^n = TD^nT^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2^n} & 1-\frac{1}{2^n} \\ 1-\frac{1}{2^n} & 1+\frac{1}{2^n} \end{pmatrix}.$$

Låter vi nu $n \to \infty$, dvs n växa obegränsat, får vi att

$$A_{\boldsymbol{e}}^n \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exempel 19.10. Låt F vara en linjär avbildning i rummet som i en positivt orienterad ON-bas ges av matrisen

$$\text{a) } A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } C = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Utred så detaljerat som möjligt $F:s$ geometriska betydelse.

Lösning: Vi har redan i Exempel 16.67 konstaterat att eftersom matrisen

- A är ortogonal med $\det A = 1$ så är A avbildningsmatris för en rotation R.
- B är symmetrisk med $\det B = -1$ så är B avbildningsmatris för en spegling S.
- C är symmetrisk med $\det C = 0$ så är C avbildningsmatris för en projektion P.

Här ska vi använda teorin för egenvärden och egenvektorer för att dra samma slutsats samt att kunna säga mer om de här avbildningarna.

a) Matrisen A har endast ett reellt egenvärde $\lambda = 1$ (de två andra är komplexa $\pm i$). Egenvektorn $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}X$ hörande till egenvärdet $\lambda = 1$ uppfyller alltså

$$R(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v} \Leftrightarrow R(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \Leftrightarrow R(\underline{\boldsymbol{e}}X) = \underline{\boldsymbol{e}}X \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{e}}AX = \underline{\boldsymbol{e}}X,$$

dvs $\boldsymbol{v}$ löser ekvationssystemet

$$AX = X.$$

Detta betyder att vektorn $\boldsymbol{v}$ är parallell med rotationsaxeln, ty den avbildas ju på sig själv.

Eftersom $EX = X$, där E är enhetsmatrisen, så får vi ett homogent ekvationssystem

$$AX = X \Leftrightarrow AX = EX \Leftrightarrow (A - E)X = \mathbf{0}. \tag{19.2}$$

Förenklar vi $A - E$, får vi

$$\begin{aligned} A - E &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -4 & 8 \\ 8 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi skriver ekvationssystemet i (19.2) på matrisform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -4 & 8 & 0 \\ 8 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Detta har lösningen $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, dvs rotationsaxeln är parallell med vektorn

$\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. För att bestämma rotationsvinkeln θ, beräknar vi vinkeln mellan en vektor $\boldsymbol{u}$ och dess bild $R(\boldsymbol{u})$. Låt $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vara en vektor som ligger i normalplanet. Då är

$$R(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{9}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så att

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot R(\boldsymbol{u})}{|\boldsymbol{u}|\,|R(\boldsymbol{u})|} = 0.$$

Alltså är rotationsvinkeln $\theta = \frac{\pi}{2}$. Vidare gäller att vridningen sker moturs, ty vektorn

$$\boldsymbol{u} \times R(\boldsymbol{u}) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pekar i samma riktning som vektorn $\boldsymbol{v}$.

b) Matrisen B har egenvärden $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, och $\lambda_3 = 1$, med tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ spänner upp det plan som är parallellt med alla vektorer som speglas på sig själva. Vektorn $\boldsymbol{v}_1$ som speglas i $-\boldsymbol{v}_1$ är förstås normal till detta plan. Observera också att $\boldsymbol{v}_1$ är parallell med $\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3$. Alltså, B är avbildningsmatris för en spegling av rummet i planet $x + 2y + 3z = 0$.

c) Matrisen C har egenvärden $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, och $\lambda_3 = 1$, med tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ spänner upp det plan som är parallellt med alla vektorer som projiceras på sig själva. Vektorn $\boldsymbol{v}_1$ som projiceras på nollvektorn är förstås normal till detta plan. Observera också att $\boldsymbol{v}_1$ är parallell med $\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3$. Alltså, C är avbildningsmatris för en projektion i rummet på planet $x + 2y + 3z = 0$.