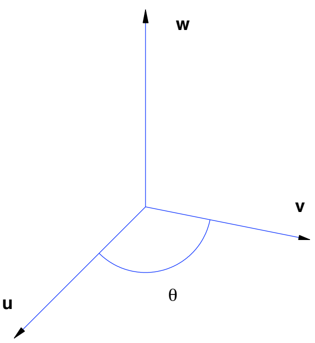
# 4. Vektorprodukt

Vi kommer i det här avsnittet att definiera en ny räkneoperation för vektorer **endast** i rummet. Räkneoperationen kallas för **Vektorprodukt** (eller **kryssprodukt**) och är återigen en ny vektor i rummet. Vektorprodukten kommer att hjälpa oss att bestämma en konvention när vi ska rita ett koordinatsystem. Som bekant finns det olika sätt att rita ett koordinatsystem med de tre koordinataxlarna $x$-axeln, $y$-axeln och $z$-axeln parallella med respektive basvektor $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$. När vi har definierat vektorprodukten kommer vi endast att rita i ett s.k. **högerorienterat system**.

## 4.1. Definition av vektorprodukt

**Definition 4.1.** Låt $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ vara tre vektorer i rummet. Den ordnade trippeln $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ kallas ett **högerorienterat system** och säges vara **positivt orienterat** om den minsta vridning, som överför $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ sker moturs sett från $\boldsymbol{w}$: spets.

**Figur 4.2.**




**Minnes regel:** Tumme, pekfinger och långfinger på högerhand bildar ett högersystem.

**Definition 4.3.** **Vektorprodukt** (eller **kryssprodukt**) mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är den vektor $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ som entydigt bestäms av:

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ är ortogonal mot både $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.
2. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ bildar ett högersystem.
3. $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}| \sin\theta$, där $\theta$ är vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.

Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är parallella sätter vi $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Att vektorn $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ är entydigt bestämd kan vi inse på följande sätt. Eftersom vi är i rummet återstår endast en riktning som är ortogonal mot det plan som spänns upp av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$; den har vi kallat för normalen. Vi väljer den riktning $\boldsymbol{w}$ på normalen som gör att mängden $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ är ett högerorienterat system. Efter att ha bestämt riktningen återstår att fixa längden. Vi väljer den vektor $\boldsymbol{w}$ som har längden $|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\sin\theta$, dvs

$$|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\sin\theta.$$

Vi döper om vektorn $\boldsymbol{w}$ med egenskaperna ovan till $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

Vi fortsätter med att titta lite närmare på egenskaperna hos vektorprodukten $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.
I figur 4.2 ser vi från spetsen av vektorn $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ att vridningen av $-\boldsymbol{v}$ på $\boldsymbol{u}$ sker moturs.
Detta betyder då att

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u},$$

ty

- vektorn $-\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ är ortogonal mot både $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.
- mängden $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$ bildar ett högerorienterat system.
- $|-\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}| = |-\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{u}| \sin(\pi - \theta) = |\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{u}| \sin\theta = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$.

Vi har därmed motiverat 1. i Sats 4.4 nedan. Vidare motiverar vi 2. i Sats 4.4 med att

$$|(\lambda\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v}| = |\lambda\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\sin\theta = |\lambda||\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\sin\theta = |\lambda(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})|.$$

Om vi nu delar upp $\boldsymbol{v}$ i en ortogonalprojektion i $\boldsymbol{u}$, dvs

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\parallel\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}},$$

så gäller enligt pythagoras sats att $|\boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}}| = |\boldsymbol{v}|\sin\theta$ och $|\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{v}_{\parallel\boldsymbol{u}}|^2 + |\boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}}|^2$. Det följer att

$$|\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v}_{\parallel\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}})|^2 = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2\sin^2\theta = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2_{\perp\boldsymbol{u}} = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2_{\perp\boldsymbol{u}}\sin^2\frac{\pi}{2} = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}_{\perp\boldsymbol{u}}|^2.$$

Detta tillsammans med att $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}_{\parallel\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$ motiverar 3. i Sats 4.4.

**Sats 4.4.** Räknelagar för vektorprodukt i rummet:

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$.
2. $(\lambda\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$, där $\lambda$ är reellt.
3. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$.