20. Kvadratiska former

I det här avsnittet ska vi studera homogena andragradspolynom Q som vi kommer att kalla för **kvadratiska former**. Låt oss börja med ett exempel innan vi ger definitionen.

Exempel 20.1. Antag $\mathbf{E}^n$ är ett n-dimensionellt euklidiskt rum med en ON-bas $\underline{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ och $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \underline{e}\,X \in \mathbf{E}^n$. Då är

1. $Q_1(\boldsymbol{u}) = Q_1(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
2. $Q_2(\boldsymbol{u}) = Q_2(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3$

två exempel på kvadratiska former i $\mathbf{E}^2$ resp. $\mathbf{E}^3$. □

Definition 20.2. Antag $\mathbf{E}^n$ är ett n-dimensionellt euklidiskt rum med en ON-bas $\underline{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ och $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \underline{e}X$. Vi säger att funktionen $Q : E^n \to \mathbf{R}$ är en kvadratisk form om

$$Q(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k,$$

där alla a_{jk} är reella tal.

Exempel 20.3. Kvadratisk form och matrisframställning: I det här exemplet ska vi försöka skriva de kvadratiska formerna i exemplet ovan på matrisform:

1. Den kvadratiska formen

$$Q_1(\boldsymbol{u}) = Q_1(\underline{e}X) = x_1^2 + \underline{4x_1x_2} + x_2^2 = x_1^2 + \underline{2x_1x_2} + \underline{2x_2x_1} + x_2^2$$

kan skrivas som en matrisprodukt

$$Q_1(\boldsymbol{u}) = Q_1(\underline{e}X) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X^tAX.$$

På huvuddiagonalen i matrisen A står koefficienterna för kvadraterna x_j^2 och på plats (j,k) står koefficienten för x_jx_k.

2. På samma sätt kan den kvadratiska formen Q_2 skrivas

$$\begin{aligned} Q_2(\boldsymbol{u}) &= Q_2(\underline{e}X) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + \underline{4x_1x_2} - \underline{\underline{6x_1x_3}} - \underline{\underline{\underline{8x_2x_3}}} \\ &= x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + \underline{2x_1x_2} + \underline{2x_2x_1} - \underline{\underline{3x_1x_3}} - \underline{\underline{3x_3x_1}} - \underline{\underline{\underline{4x_2x_3}}} - \underline{\underline{\underline{4x_3x_2}}} \\ &= (x_1, x_2.x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & -4 \\ -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^tAX. \end{aligned}$$

Allmänt gäller att

Sats 20.4. Antag $\mathbf{E}^n$ är ett n-dimensionellt euklidiskt rum med en ON-bas $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Låt $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X$. Då kan varje kvadratisk form $Q : \mathbf{E}^n \to \mathbf{R}$ skrivas på formen

$$Q(\boldsymbol{u}) = Q(\underline{\boldsymbol{e}}X) = X^t AX,$$

där A är en symmetrisk matris.

Nedan ska vi studera den kvadratiska formen $Q = X^t AX$ lite närmare. Vi håller oss till euklidiska rummet $\mathbf{E}^3$ med dimensionen 3 och basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Eftersom matrisen A är symmetrisk så följer av Spektralsatsen 19.6 att matrisen A är diagonaliserbar, dvs det finns en ortogonal matris T och en diagonalmatris D, så att

$$A = TDT^t.$$

Matrisen T innehåller i sina kolonner en ON-bas av egenvektorer $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ till A. Tillhörande egenvärden λ_1, λ_2, och λ_3 finns på diagonalen i matrisen D. Om $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X = \underline{\boldsymbol{f}}Y$ är en godtycklig vektor, så följer förutom bassambandet $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T$ även kooordinatsambandet $X = TY$. Sätter vi in detta i kvadratiska formen:

$$Q = X^t AX = X^t TDT^t X = (T^t X)^t D(T^t X).$$

Låter vi $X = TY$, dvs $T^t X = Y$, så fås

$$Q(\boldsymbol{u}) = X^t AX = X^t TDT^t X = (T^t X)^t D(T^t X) = Y^t DY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2. \tag{20.2}$$

Den trevliga formen som fås på Q efter basbytet i 20.2 motiverar att vi kallar ON-basen av egenvektorer $\underline{\boldsymbol{f}}$ för **kanonisk bas**.
Vi har således visat följande resultat

Sats 20.5. Antag $\mathbf{E}^n$ är ett n-dimensionellt euklidiskt rum och $Q = X^t AX$ där A är symmetrisk. Låt $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ vara en ON-bas för $\mathbf{E}^n$ bestående av egenvektorer till A med tillhörande egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Då är

$$Q(y_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + y_n \boldsymbol{f}_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \tag{20.3}$$

Låt oss titta på uttrycket i (20.3). Om λ_1 och λ_n är minsta respektive största egenvärde och $\boldsymbol{u}$ ligger på **enhetssfären**, dvs $\|\boldsymbol{u}\|^2 = y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1$ så skulle största värde till Q ges av

$$Q(y_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + y_n \boldsymbol{f}_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_n \cdot 1 = \lambda_n.$$

På motvarande sätt fås Q:s minsta värde:

$$Q(y_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + y_n \boldsymbol{f}_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \geq \lambda_1 (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_1 \cdot 1 = \lambda_1.$$

Alltså, har vi visat

Sats 20.6. Antag att egenvärdena ovan är ordnade så att

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

Då är Q:s största värde $= \lambda_n$ och minsta värde $= \lambda_1$ under bivillkoret $\|\boldsymbol{u}\| = 1$.

Exempel 20.7. Betrakta i $\mathbf{E}^2$ den kvadratiska formen

$$Q(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2.$$

I vilka punkter på enhetscirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 1$ antar Q största resp. minsta värde?

Lösning: Vi har att $Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 = X^t \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = X^tAX$. Eftersom A är symmetrisk säger spektralsatsen att A är diagonaliserbar med $A = TDT^t$. Vi bestämmer egenvärdena resp. egenvektorerna till A och får att $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ och $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Byter vi till ON-basen av egenvektorer ges koordinatsambandet då av $X = TY$. Den kvadratiska formen Q kan i denna kanoniska bas

$$Q = X^t \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = X^tTDT^tX = Y^tDY = -2y_1^2 + 4y_2^2.$$

Enhetscirkeln i nya basen

$$1 = x_1^2 + x_2^2 = X^tX = (TY)^tTY = Y^tT^tTY = Y^tY = y_1^2 + y_2^2.$$

Q:s största värde 4 på $y_1^2 + y_2^2 = 1$ fås i punkten $y_1 = 0$, $y_2 = \pm 1$ som i gamla basen har koordinaterna $X = TY = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dvs $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.
Q:s minsta värde -2 på $y_1^2 + y_2^2 = 1$ fås i punkten $y_1 = \pm 1$, $y_2 = 0$ som i gamla basen har koordinaterna $X = TY = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dvs $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. $\square$

Exempel 20.8. Bestäm största och minsta värde av

$$Q = x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 \qquad \text{då} \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Ange också en punkt där det största respektive minsta värdet antas.

Lösning: Vi kan skriva om Q på matrisform, dvs $Q = X^tAX$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

är symmetrisk och därmed diagonaliserbar. Vi bestämmer egenvärdena till A genom att lösa sekularekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$. Dessa är $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 0$, och $\lambda_3 = 3$. Tillhörande egenvektorer är enligt spektralsatsen ortogonala.
Normerar vi dessa får vi $\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)^t$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}(2,-2,1)^t$, och $\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{3}(2,1,-2)^t$. Inför vi nu en ny ON-bas bestående av egenvektorerna, dvs en kanonisk bas, så kan Q skrivas som

$$Q(y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + y_3\boldsymbol{f}_3) = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2,$$

dvs

$$Q = -3y_1^2 + 3y_3^2$$

och därmed är

$$-3 \leq Q \leq 3 \tag{20.4}$$

Största värdet för Q är alltså 3 som i den nya basen fås i punkter av typen $(0, t, \pm 1)$, $t \in \mathbf{R}$, dvs $y_1 = 0$, y_2 är godtyckligt och $y_3 = \pm 1$. Minsta värdet är -3 och fås i punkter av typen $(\pm 1, s, 0)$, $s \in \mathbf{R}$. För att ange en punkt där största värde antas sätter vi enklast $t = 0$ och väljer punkten $(0,0,1)$ som i den gamla basen ges av

$$X = TY = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

dvs punkten $\frac{1}{3}(2,1,-2)$. Vill vi ange en punkt för minsta värde kan vi sätta t.ex. $s = 0$ och välja $(1,0,0)$ som i den gamla basen ges av

$$X = TY = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

dvs i punkten $\frac{1}{3}(1,2,2)$. □