8.5. Tillämpningar av determinanter

Determinantbegreppet är användbart vid undersökning av lösbarheten hos kvadratiska ekvationssystem. Detta visar följande sats.

Sats 8.17. Låt A vara en $n \times n$ matris. Låt vidare $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{b}$ vara kolonnmatriser av typen $n \times 1$. Då är följande påståenden ekvivalenta:

1. $\det A \neq 0$.
2. A inverterbar.
3. Kolonnerna (raderna) i A är linjärt oberoende.
4. Det homogena ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har en entydig lösning; nämligen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
5. Det inhomogena ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en entydig lösning.

Exempel 8.18. För vilka värden på konstanten a har ekvationssystemet en entydig lösning? (Detta är övning 1.8 i kompendiet om *Vektorer, linjer och plan*.)

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

Lösning: Vi skriver systemet på matrisform:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Systemet har enligt Sats 8.17 exakt en lösning om t.ex., $\det A \neq 0$. Vi bestämmer därför $\det A$. Vi skaffar genom radoperationer på rad 2 två nollor i kolonn 3:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & a-2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a-2 & -1 \\ -1 & a-2 \end{vmatrix} = (a-2)^2 - 1.$$

Alltså är

$$\det A = 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 1 \Leftrightarrow a - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow a = 1, 3.$$

Därmed har systemet en entydig lösning endast om $a \neq 1$ och $a \neq 3$.

Exempel 8.19. För vilka reella x bildar mängden $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$, där

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,0)^t,\ \boldsymbol{v}_2 = (1,0,1,0)^t,\ \boldsymbol{v}_3 = (1,0,0,1)^t,\ \boldsymbol{v}_4 = (1,1,1,x)^t$$

en bas i $\mathbf{R}^4$?

Lösning: Vi antar att vektorerna är givna i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ i $\mathbf{R}^4$. Mängden M är linjärt beroende om det finns tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och λ_4 ej alla noll så att

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 + \lambda_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Denna relation kan på matrisform skrivas

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{\lambda}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}.$$

Enligt Sats 8.17 har systemet $A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ den entydiga lösningen $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ om $\det A \neq 0$ och därmed är M linjärt oberoende. Vi skaffar ytterligare en nolla i kolonn 1 och utvecklar sen efter kolonn 1:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} \\ &= \{\text{rad } 2 - \text{rad } 1\} \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -(-x-1) = x+1. \end{aligned}$$

Vi får följande fall:

Fall 1: Om $x = -1$, så är $\det A = 0$ och systemet $A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ kan antingen sakna lösning eller ha oändligt många lösningar. I fallet oändligt många lösningar betyder det att

$$M = \{\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,0)^t,\ \boldsymbol{v}_2 = (1,0,1,0)^t,\ \boldsymbol{v}_3 = (1,0,0,1)^t,\ \boldsymbol{v}_4 = (1,1,1,-1)^t\}$$

är linjärt beroende $\mathbf{R}^4$.

Fall 2: Om $x \neq -1$, så är $\det A \neq 0$ och därmed har systemet $A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ precis en lösning $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ vilket visar att mängden

$$M = \{\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,0)^t,\ \boldsymbol{v}_2 = (1,0,1,0)^t,\ \boldsymbol{v}_3 = (1,0,0,1)^t,\ \boldsymbol{v}_4 = (1,1,1,x)^t\}$$

är linjärt oberoende i $\mathbf{R}^4$. $\square$

Exempel 8.20. (**Determinanten som skalfaktor**). Här tar vi upp två exempel som visar hur determinanten kan användas som en skalfaktor när ett objekt avbildas på ett annat.
a) Vi vill beräkna arean för ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i Exemepl 6.43. Vi har sett att matrisen $\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$ avbildar urbilden ellipsen ovan på bilden enhetscirkeln $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Determinanten för A anger förhållandet mellan måttet för det nya objektet som är ellipsen och måttet för det gamla objektet som är enhetscirkeln, så att

$$|\det A| = \frac{\text{måttet för det nya objektet}}{\text{måttet för det gamla objektet}} = \frac{\text{cirkelns area}}{\text{ellipsens area}},$$

dvs

$$\text{ellipsens area} = \frac{\text{cirkelns area}}{|\det A|} = \frac{1}{\frac{\pi}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \pi ab.$$

b) Vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i rummet spänner upp en enhetskub Q. Matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avbildar Q på en parallellepiped $\tilde{Q}$ som spänns upp av kanvektorerna

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu beräkna volymen för bilden $\tilde{Q}$ med hjälp av determinanten för matrisen A och volymen för urbilden Q enligt

$$|\det A| = \frac{\text{måttet för det nya objektet}}{\text{måttet för det gamla objektet}} = \frac{\mathrm{vol}(Q)}{\mathrm{vol}(\tilde{Q})} = \frac{1}{\mathrm{vol}(\tilde{Q})}.$$

Eftersom $\det A = 1$, så är

$$\mathrm{vol}(\tilde{Q}) = \frac{1}{|\det A|} = 1.$$

Exempel 8.21. (**Egenvärden och egenvektorer**.) För vilka λ har ekvationssystemet

$$\begin{cases} 11x - 4y - z = \lambda x \\ -4x + 14y - 4z = \lambda y \\ -x - 4y + 11z = \lambda z \end{cases}$$

icke-triviala lösningar?

Lösning: Eftersom ett linjärt ekvationssystem kan antingen sakna lösning, ha en entydig lösning eller ha oändligt många lösningar, så kan valet av parametern λ styra vilket av dessa 3 fall som systemet kan ha. Förvisso satisfierar den triviala lösningen $x = y = z = 0$ systemet men vi söker bestämma λ, så att systemet har andra lösningar än den triviala. Systemet på matrisform är

$$\begin{pmatrix} 11 & -4 & -1 \\ -4 & 14 & -4 \\ -1 & -4 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = \lambda X.$$

Vi börjar med att flytta över de obekanta variablerna till vänstra ledet

$$\begin{cases} 11x - 4y - z = \lambda x \\ -4x + 14y - 4z = \lambda y \\ -x - 4y + 11z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (11-\lambda)x - 4y - z = 0 \\ -4x + (14-\lambda)y - 4z = 0 \\ -x - 4y + (11-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

och som på matrisform kan skrivas

$$\begin{pmatrix} 11-\lambda & -4 & -1 \\ -4 & 14-\lambda & -4 \\ -1 & -4 & 11-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - \lambda E)X = \mathbf{0},$$

där E är enhetsmatrisen. Vi söker nu bestämma λ så att systemet $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har andra lösningar än den triviala lösningen. I så fall kommer systemet att ha oändligt många lösningar. Detta kommer i sin tur att kräva att $\det(A - \lambda E) = 0$. Slutsatsen av detta blir att vi bör söka λ så att $\det(A - \lambda E) = 0$. Vi utnyttjar att matrisen är symmetrisk när vi ska använda radoperationer för att skaffa nollor. Vi subtraherar rad 1 från rad 3:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -4 & -1 \\ -4 & 14-\lambda & -4 \\ -1 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -4 & -1 \\ -4 & 14-\lambda & -4 \\ -12+\lambda & 0 & 12-\lambda \end{vmatrix}.$$

Vi bryter ut $(12 - \lambda)$ från sista raden och adderar kolonn 3 till kolonn 1:

$$\det(A - \lambda E) = (12-\lambda)\begin{vmatrix} 11-\lambda & -4 & -1 \\ -4 & 14-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (12-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & -4 & -1 \\ -8 & 14-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Utveckling efter rad 3 ger slutligen

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (12-\lambda)(-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 10-\lambda & -4 \\ -8 & 14-\lambda \end{vmatrix} = (12-\lambda)((10-\lambda)(14-\lambda) - 32) \\ &= (12-\lambda)(\lambda^2 - 24\lambda + 108) = (12-\lambda)(\lambda - 6)(\lambda - 18). \end{aligned}$$

Eftersom $\det(A - \lambda E) = 0$ för $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 12$ och $\lambda_3 = 18$, så har systemet för dessa värden på λ en icke-trivial lösning. Vi tar och bestämmer dessa lösningar.

Fallet $\lambda_1 = 6$: Vi har alltså

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 11x & - & 4y & - & z & = & 6x \\ -4x & + & 14y & - & 4z & = & 6y \\ -x & - & 4y & + & 11z & = & 6z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & - & 4y & - & z & = & 0 \\ -4x & + & 8y & - & 4z & = & 0 \\ -x & - & 4y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -4 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

som har lösningen $x = 1$, $y = 1$ och $z = 1$, dvs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fallet $\lambda_2 = 12$: Vi får

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 11x & - & 4y & - & z & = & 12x \\ -4x & + & 14y & - & 4z & = & 12y \\ -x & - & 4y & + & 11z & = & 12z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 4y & - & z & = & 0 \\ -4x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \\ -x & - & 4y & + & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -4 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

som har lösningen $x = -1$, $y = 0$ och $z = 1$, dvs $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fallet $\lambda_2 = 18$: Det följer att

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 11x & - & 4y & - & z & = & 18x \\ -4x & + & 14y & - & 4z & = & 18y \\ -x & - & 4y & + & 11z & = & 18z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -7x & - & 4y & - & z & = & 0 \\ -4x & + & -4y & - & 4z & = & 0 \\ -x & - & 4y & + & -7z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -7 & -4 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

som har lösningen $x = 1$, $y = -2$ och $z = 1$, dvs $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Talen λ_1, λ_2 och λ_3 som vi har fått ovan kallas **egenvärden** och tillhörande vektorer X_1, X_2 och X_3 kallas för **egenvektorer**. Dessa begrepp kommer vi att studera utförligare senare i Kapitel 18.