## 20.4. Teckenkaraktär hos kvadratiska former

**Definition 20.17. Teckenkaraktär:** En kvadratisk form $Q : E \to \mathbf{R}$ kan ha något av följande teckenkaraktärer:

1. **Positivt definit:** Om $Q(\boldsymbol{u}) > 0$ för alla $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$.
2. **Positivt semidefinit:** $Q(\boldsymbol{u}) \geq 0$ för alla $\boldsymbol{u}$
3. **Indefinit:** $Q$ antar både positiva och negativa värden.
4. **Negativt semidefinit:** $Q(\boldsymbol{u}) \leq 0$ för alla $\boldsymbol{u}$.
5. **Negativt definit:** Om $Q(\boldsymbol{u}) < 0$ för alla $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$.

**Anmärkning 20.18.** En symmetrisk matris $A$ säges vara **positivt definit**, **positivt semidefinit**, **indefinit negativ definit** och **negativ semidefinit** om motsvarande kvadratisk form $Q = X^t AX$ är positivt definit, positivt semidefinit, indefinit, negativ definit respektive negativ semidefinit.

**Exempel 20.19.** Ange teckenkaraktären för följande kvadratiska former:

1. $Q_1(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1^2 + 2x_2^2$.
2. $Q_2(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1^2 + 2x_2^2$.
3. $Q_3(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$.
4. $Q_4(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3^2$.
5. $Q_5(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

**Lösning:**

1. $Q_1(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)$ är positivt definit, ty $x_1^2 + 2x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$, dvs $Q_1 = 0$ endast för $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.
2. $Q_3(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ och $x_3$ är godtyckligt. T.ex. är $Q_3$ noll för $(0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$. Alltså är $Q_2$ positivt semidefinit.
3. $Q_2(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = 0 \Leftrightarrow -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Alltså, $Q_2$ är negativt definit.
4. $Q_4$ är indifinit, ty både positiva och negativa värden. T.ex $Q_4 = 1$ i $(1, 0, 0)$ och $Q_4 = -1$ i punkten $(1, -1, 0)$.

5. I kanonisk bas såg vi i Exempel 20.16 att $Q_5$ kan skrivas

$$Q_5(y_1\boldsymbol{f}_1 + f_2\boldsymbol{f}_2 + y_3\boldsymbol{f}_3) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2.$$

Vi har att

$$Q_5 = 0 \Leftrightarrow 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 = y_3 = 0 \Leftrightarrow X = TY \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

där $X = TY$ är koordinatsambandet och $T$ innehåller egenvektorerna i sina kolonner. Alltså är $Q_5$ positivt definit. $\square$

Av Sats 20.6 följer direkt

**Sats 20.20.** Låt $Q = X^t AX$ vara en kvadratisk form, där $A$ är en symmetrisk matris med minsta egenvärdet $\lambda_{\text{min}}$ och största egenvärdet $\lambda_{\text{max}}$. Då är $Q$

1. positivt definit om $\lambda_{\text{min}} > 0$
2. positivt semidefinit om $\lambda_{\text{min}} = 0$
3. negativt definit om $\lambda_{\text{max}} < 0$
4. negativt semidefinit om $\lambda_{\text{max}} = 0$
5. indefinit om $A$ har såväl negativa som positiva egenvärden.

**Anmärkning 20.21.** Av Sats 20.20 följer att om en matris $A$ inte har egenvärdet $\lambda = 0$, så är $A$ inverterbar.

**Exempel 20.22.** Ange teckenkaraktären för följande kvadratiska former:

1. $Q_1(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1^2 + 2x_2^2$.
2. $Q_2(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1^2 + 2x_2^2$.
3. $Q_3(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$.
4. $Q_4(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3^2$.
5. $Q_5(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.
6. $Q_6(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = (x_1 + 2x_2)^2 - 2x_2^2$.

**Lösning:**

1. $Q_1(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1^2 + 2x_2^2 = X^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$. Egenvärdena är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$. Alltså är $Q_1$ positivt definit.
2. $Q_2(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1^2 + 2x_2^2 = X^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X$. Egenvärdena är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 0$. Alltså är $Q_2$ positivt semidefinit.
3. $Q_3(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 = X^t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} X$. Egenvärdena är $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ och $\lambda_3 = -3$. Alltså är $Q_3$ negativt definit.

4. $Q_4(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3^2 = X^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X$. Egenvärdena är $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ och $\lambda_3 = 3$. Alltså är $Q_3$ indefinit.

5. $Q_5(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = X^t \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} X$. Egenvärdena är $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ och $\lambda_3 = 9$. Alltså är $Q_5$ positivt definit.

6. $Q_6$ är skriven så att alla termer är i kvadrat, dvs $Q_6$ är **kvadratkompletterat**. På så sätt är det lätt att avgöra teckenkaraktären hos $Q_6$. Genom att sätt in några lämpliga koordinater ser vi att $Q_6$ är indefinit, ty $Q_6 = 1$ för $x_1 = 1$ och $x_2 = 0$ och $Q_6 = -1$ för $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$. Jämför annars med $Q_6 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$. $\square$