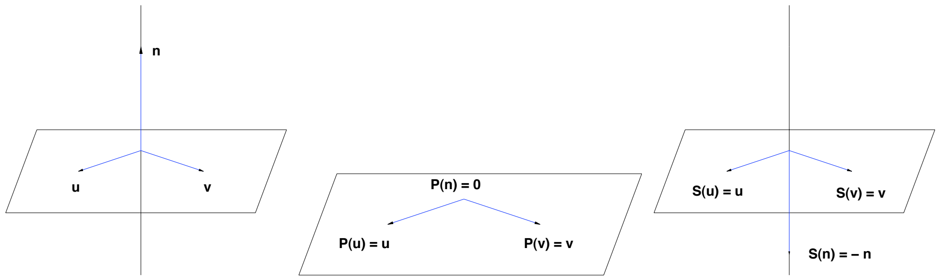
18. Egenvärden och egenvektorer

18.1. Egenvärden och egenvektorer

Exempel 18.1. Låt oss studera avbildningarna; en projektion P på ett plan och en spegling S i samma plan. Vi antar att planet har normalen $\boldsymbol{n}$ och att det spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.

Figur 18.2.



För en projektion vet vi att normalen projiceras på nollvektorn och att vektorerena $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ projiceras på sig själva, dvs

$$P(\boldsymbol{n}) = 0 \cdot \boldsymbol{n}, \qquad P(\boldsymbol{u}) = 1 \cdot \boldsymbol{u}, \qquad P(\boldsymbol{v}) = 1 \cdot \boldsymbol{v}$$

Vi är intresserade av talen 0, 1, och 1 framför $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ ovan. Vi kallar dessa tal för **egenvärden** och tillhörande vektorer $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u}$ resp. $\boldsymbol{v}$ för **egenvektorer**.

Detta betyder att projektionen P har

1. egenvärdet 0 med en tillhörande egenvektor $\boldsymbol{n}$,
2. egenvärdet 1 med en tillhörande egenvektor $\boldsymbol{u}$,
3. egenvärdet 1 med en tillhörande egenvektor $\boldsymbol{v}$.

Eftersom speglingen S har egenskapen

$$S(\boldsymbol{n}) = -1 \cdot \boldsymbol{n}, \qquad S(\boldsymbol{u}) = 1 \cdot \boldsymbol{u}, \qquad S(\boldsymbol{v}) = 1 \cdot \boldsymbol{v}$$

säger vi att S har

1. egenvärdet -1 med en tillhörande egenvektor $\boldsymbol{n}$
2. egenvärdet 1 med en tillhörande egenvektor $\boldsymbol{u}$
3. egenvärdet 1 med en tillhörande egenvektor $\boldsymbol{v}$

$\square$

Definition 18.3. Låt V vara ett vektorrum och antag att $F : V \to V$ är en linjär avbildning.

1. Vi säger att vektorn $\boldsymbol{v} \neq 0$ är en **egenvektor** till F om
$$F(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$$
för något reellt tal λ. Detta λ kallas **egenvärdet** hörande till vektorn $\boldsymbol{v}$.

2. **Egenrummet**, E_λ, till λ är mängden av alla **lösningar** till ekvationen
$$F(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v},$$
dvs
$$E_\lambda = \{\boldsymbol{v} \in V : \ F(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\} = [\boldsymbol{v}]$$
för något $\lambda \in \mathbf{R}$.

Exempel 18.4. Låt $\underline{\boldsymbol{e}}$ vara en bas i planet och låt F vara en linjär avbildning med matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$
Då är $\lambda_1 = 3$ ett egenvärde till F med tillhörande egenvektor $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, ty
$$F(\boldsymbol{v}_1) = \underline{\boldsymbol{e}} A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1,$$
dvs
$$F(\boldsymbol{v}_1) = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1.$$
Antag att vi vet att $\lambda_2 = 4$. Då kan vi bestämma tillhörande egenvektor $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} X$ genom att använda definitionen, ty
$$F(\boldsymbol{v}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\boldsymbol{e}} A X = \lambda_2 \underline{\boldsymbol{e}} X.$$
För att bestämma den obekanta X, flyttar vi över till samma led och löser det homogena ekvationssystemet därefter, dvs
$$AX - \lambda_2 X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 & = & 0 \\ -2x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{cases}$$
Detta har lösningen $x_1 = x_2 = t$, $t \in \mathbf{R}$ vilket ger att $\boldsymbol{v}_2 = t(1,1)^t$. Dessutom $E_{\lambda_1} = [(3,2)^t]$ och $E_{\lambda_2} = [(1,1)^t]$. □

Nästa exempel visar att det inte är säkert att vi kan hitta en egenvektor till varje egenvärde.

Exempel 18.5. I rummet har en avbildning G matrisen $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Man kan visa att G har ett egenvärde $\lambda = 3$ av multiplicitet 3, dvs $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Till detta egenvärde hör två egenvektorer $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,-1)^t$ och $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,0)^t$, så att $E_{\lambda=3} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$. Observera någon tredje egenvektor $\boldsymbol{v}_3$ finns inte. □

Exempel 18.6. Låt F vara en linjär avbildning på rummet med matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Visa att $\lambda_1 = 8$ är ett egenvärde med tillhörande egenvektor $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ till F.

2. Visa att $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor till F. Bestäm tillhörande egenvärde λ_2.

3. Visa också att $\lambda_3 = -6$ är ett egenvärde till F och bestäm tillhörande egenvektor $\boldsymbol{v}_3$.

Lösning: Talet λ kallas ett egenvärde med tillhörande egenvektor $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}\, X$ om

$$F(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v} \Leftrightarrow F(\underline{\boldsymbol{e}}\, X) = \lambda\, \underline{\boldsymbol{e}}\, X \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{e}}\, AX = \underline{\boldsymbol{\lambda}}\, X \Leftrightarrow AX = \lambda X.$$

1. Eftersom

$$F(\boldsymbol{v}_1) = F\left(\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = 8\, \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},$$

så är $\lambda_1 = 8$ ett egenvärde med tillhörande egenvektor $\underline{\boldsymbol{e}}(6, 6, 5)^t$ till F.

2. $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor med tillhörande egenvärde λ_2 om

$$F(\boldsymbol{v}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \Leftrightarrow AX_2 = \lambda_2 X_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\, \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_2.$$

Alltså är $\lambda_2 = 2$.

3. $\lambda_3 = -6$ är ett egenvärde till F om det finns en tillhörande egenvektor $\boldsymbol{v}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}\, X_3$, så att

$$F(\boldsymbol{v}_3) = -6\boldsymbol{v}_3 \Leftrightarrow AX_3 = -6X_3 \Leftrightarrow AX_3 + 6X_3 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow (A + 6E)X_3 = \boldsymbol{0},$$

dvs

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow X_3 = t \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $\boldsymbol{v}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$. $\square$

Exempel 18.7. I Exempel 18.1 såg vi att ortogonalprojektionen P på ett plan har egenvärdena $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, och $\lambda_3 = 1$ med tillhörande egenvektorer normalen $\boldsymbol{n}$ och två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ parallella med planet. Om $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{v}\}$ är linjärt oberoende och därmed bas för rummet så ges matrisen för P i basen $\underline{\boldsymbol{f}}$ av

$$A_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{18.2}$$

eftersom

$$P(\boldsymbol{f}_1) = P(\boldsymbol{n}) = 0 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \cdot \boldsymbol{f}_1 = \underline{\boldsymbol{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\boldsymbol{f}_2) = P(\boldsymbol{u}) = 1 \cdot \boldsymbol{u} = 1 \cdot \boldsymbol{f}_2 = \underline{\boldsymbol{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\boldsymbol{f}_3) = P(\boldsymbol{v}) = 1 \cdot \boldsymbol{v} = 1 \cdot \boldsymbol{f}_3 = \underline{\boldsymbol{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Speglingen S har egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, och $\lambda_3 = 1$ med tillhörande egenvektorer normalen $\boldsymbol{n}$ och två linjärt oberoende vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.
I basen $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{v}\}$ har S matrisen

$$A_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{18.3}$$

□

Exemplet ovan visar att i en bas av egenvektorer ges avbildningsmatris av en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen och alla andra element utanför diagonalen är 0. Nästa sats visar att detta alltid gäller när vi väljer en bas bestående av egenvektorer.

Sats 18.8. Antag att $F : V \to V$ och att V har en bas $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ bestående av egenvektorer till F, med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, så är F:s matris i denna bas, en **diagonalmatris**

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bevis: Eftersom $\boldsymbol{v}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ är en egenvektor till F med tillhörande egenvärde λ_j, så gäller enligt definition att

$$F(\boldsymbol{v}_j) = \lambda_j \boldsymbol{v}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

och därmed också

$$(F(\boldsymbol{v}_1), F(\boldsymbol{v}_2), \dots, F(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Sats 18.9. Antag att $\dim V = n$ och att $\underline{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ är en bas i V. Antag vidare att $F : V \to V$ är en linjär avbildning med matrisen A i basen $\underline{e}$. Då är **egenvärdena** till F (eller till A) de reella rötterna λ till **sekularekvationen**

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Vektorn $\boldsymbol{v} = \underline{e}X$ kallas för en **egenvektor** till F (eller till A) med tillhörande egenvärde λ om X är en lösning till ekvationssystemet

$$AX = \lambda X \qquad \text{dvs} \qquad (A - \lambda E)X = \mathbf{0}.$$

Bevis: Vi vet att bilden av $\boldsymbol{v} = \underline{e}X$ under F blir

$$F(\boldsymbol{v}) = F(\underline{e}X) = \underline{e}AX. \tag{18.4}$$

Antag nu att $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor till F med tillhörande egenvärde λ, dvs $F(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$. Då gäller att

$$F(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v} = \lambda\underline{e}X. \tag{18.5}$$

Eftersom vänstra ledet i (18.4) är lika med vänstra ledet i (18.5) måste även högra leden vara lika, dvs

$$AX = \lambda X \qquad \text{eller} \qquad (A - \lambda E)X = \mathbf{0}. \tag{18.6}$$

där E är en enhetsmatris av samma typ som A som alltid är kvadratisk.

Vektorn $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, dvs $X = \mathbf{0}$ är alltid en lösning till ekvation (18.6). Denna triviala lösning är dock ointressant. Enligt Sats 8.17 så har ekvationssystemet (18.6) en entydig lösning om och endast om $\det(A - \lambda E) \neq 0$. Därför är det nödvändigt att kräva att λ ska uppfylla

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

för att undvika den till ekvation (18.6) entydiga lösningen $X = \mathbf{0}$. □

Anmärkning 18.10. Eftersom avbildningsmatrisen A är av typen $n \times n$ till en linjär avbildning F på ett linjärt rum V med $\dim V = n$, följer att sekularekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ är ett polynom i variabeln λ av ordning n.

Exempel 18.11. Bestäm egenvärden och egenvektorer till avbildningen F i planet med matrisen $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Lösning: För att lösa sekularekvationen $\det(A-\lambda E) = 0$ behöver vi först räkna ut $A-\lambda E$. Vi har att

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Löser vi nu sekularekvationen får vi

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1.$$

Alltså har vi att

$$(3-\lambda)^2 - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3 - \lambda = \pm 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4.$$

Egenvärden till F är alltså $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 4$. Tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v}_1$ resp. $\boldsymbol{v}_2$ bestämmer vi genom att lösa det homogena ekvationssystemet $(A - \lambda E)X = \mathbf{0}$ för resp. egenvärde. Vi börjar först med λ_1.

$$(A - \lambda_1 E)X = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} X = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

som har lösningen egenvektorn $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)^t$. Egenrummet är $E_{\lambda_1} = [(1,1)^t]$.
För λ_2 får vi

$$(A - \lambda_2 E)X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

vilket ger egenvektorn $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1)^t$. Egenrummet är $E_{\lambda_2} = [(1,-1)^t]$. $\square$

Exempel 18.12. Bestäm egenvärden och egenvektorer till inversen F^{-1} till avbildningen F med matrisen $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi försöker bestämma egenvärden och egenvektorer till inversen F^{-1} utan att invertera F och därmed slippa invertera matrisen A. Enligt definitionen så gäller att

$$F(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v} \Leftrightarrow F^{-1}(F(\boldsymbol{v})) = F^{-1}(\lambda \boldsymbol{v}) \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \lambda F^{-1}(\boldsymbol{v}) \Leftrightarrow F^{-1}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v}.$$

Således gäller att om λ är ett egenvärde till F med tillhörande egenvektor $\boldsymbol{v}$, så är $\frac{1}{\lambda}$ ett egenvärde till inversen F^{-1} med tillhörande egenvektor $\boldsymbol{v}$. Från Exempel 18.11 ovan följer att $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ och $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ är egenvärden till F^{-1} med tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)^t$ rspektive $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1)^t$. □

Exempel 18.13. Vi går tillbaka till Exempel 18.5 och visar egenvärden och egenvektorer till avbildningen G. Matrisen är $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vi löser sekularekvationen genom att utveckla längs andra kolonnen

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)((4-\lambda)(2-\lambda)+1) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (3-\lambda)^3. \end{aligned}$$

Egenvärdena är således $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Egenvektorerna får vi genom att lösa

$$(A-3E)X = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

dvs

$$x_1 + x_3 = 0.$$

Detta betyder att alla vektorer parallella med detta plan är egenvektorer till ett och samma egenvärde 3. Vi väljer två linjärt oberoende vektorer, t.ex. $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,-1)^t$ och $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,0)^t$, så att $E_\lambda = [(1,0,-1)^t, (0,1,0)^t]$. □

Exempel 18.14. Bestäm egenvärden och egenvektorer till linjära avbildningar med följande matriser

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -1 \\ -4 & 14 & -4 \\ -1 & -4 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning: a) Egenvärdena bestäms genom att lösa sekularekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$. I Exempel 16.9 visade vi att egenvärdena är $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 12$ och $\lambda_3 = 18$. Tillhörande egenvektorer är $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ resp. $\boldsymbol{v}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Egenvektorerna är ortogonala och normerar vi dessa får vi en ON-bas $\underline{\boldsymbol{f}}$ för $\mathbf{R}^3$. Matrisen i denna bas är $A_{\underline{\boldsymbol{f}}} = T^t A_{\underline{\boldsymbol{e}}} T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$, där egenvärdena är på diagonalen, se Exempel 16.52.

b) Sekularekvationen ger

$$0 = \det(B - \lambda E) = \left| \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5-6\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 5-6\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \right|.$$

Determinantlagarna ger att

$$0 = \left| \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5-6\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 5-6\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \right| = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \begin{vmatrix} 5-6\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 5-6\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 2-6\lambda \end{vmatrix}.$$

Addera t.ex., kolonn 2 till kolonn 1:

$$0 = \begin{vmatrix} 6-6\lambda & 1 & -2 \\ 6-6\lambda & 5-6\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-6\lambda \end{vmatrix} = \{\text{rad 1-rad 2}\} = \begin{vmatrix} 6-6\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 4-6\lambda & 4 \\ 0 & 2 & 2-6\lambda \end{vmatrix}.$$

Utveckling längs kolonn 1 ger

$$0 = (6-6\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4-6\lambda & 4 \\ 2 & 2-6\lambda \end{vmatrix} = 216\lambda(1-\lambda)(\lambda-1).$$

Alltså är $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Vi bestämmer nu tillhörande egenvektorer. Vektorn $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\, X_1$ är en egenvektor tillhörande $\lambda_1 = 0$ om

$$F(\boldsymbol{v}_1) = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \Leftrightarrow F(\underline{\boldsymbol{e}}\, X_1) = \lambda_1\, \underline{\boldsymbol{e}}\, X_1 \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{e}}\, B X_1 = \lambda_1\, \underline{\boldsymbol{e}}\, X_1 \Leftrightarrow (B - \lambda_1 E) X_1 = \mathbf{0}. \tag{18.7}$$

Vi behöver alltså lösa det homogena systemet

$$(B - \lambda_1 E) X_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5/6 - \lambda_1 & 1/6 & -2/6 & 0 \\ 1/6 & 5/6 - \lambda_1 & 2/6 & 0 \\ -2/6 & 2/6 & 2/6 - \lambda_1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5-6\lambda_1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 5-6\lambda_1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2-6\lambda_1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Lösningen är $X_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och därmed är $\boldsymbol{v}_1 = t\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Egenvektorn $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\,X_2$ till $\lambda_2 = 1$ bestämmer vi på samma sätt som i (18.7) som leder till följande system

$$(B - \lambda_1 E)X_1 = \mathbf{0} \cdots \Leftrightarrow \cdots \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

som har lösningen $X_{2,3} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi väljer då $\boldsymbol{v}_2 = s\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_3 = t\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Observera att $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ är ej parallella.

c) Sekularekvationen ger

$$0 = \det(C - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Det homogena systemet vi får för $\lambda_1 = 1$ enligt (18.7) är

$$(C - \lambda_1 E) = \mathbf{0} \cdots \Leftrightarrow \cdots \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Detta system har endast lösningen $X_1 = t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, så att $\boldsymbol{v}_1 = t\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Sekularekvationen ger här

$$0 = \det(D - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Enligt (18.7) får vi för $\lambda_1 = 1$ att systemet

$$(D - \lambda_1 E) = \mathbf{0} \cdots \Leftrightarrow \cdots \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

lösningen $X_{1,2} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, så att $\boldsymbol{v}_1 = s\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = t\,\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\square$