6.2. Matrisoperationer

Följande räknelagar följer av definitionen av matris.

Sats 6.11. Räknelagar för matriser. Låt matriserna A, B och C vara av samma typ och låt $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Då gäller att

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Andra räknelagar för produkten mellan matriser är följande.

Sats 6.12. Räknelagar för matriser. Låt A, B och C vara matriser och låt $\lambda \in \mathbf{R}$. Under förutsättningen att produkterna nedan är giltiga gäller följande

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $(\lambda A)B = \lambda(AB)$
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. $(B + C)A = BA + CA$

Vi inför en ny operation på matriser.

Definition 6.13. Transponatet A^t av en $m \times n$-matris A är den $n \times m$-matris som fås genom att byta plats på A:s rader och kolonner; dvs

$$j\text{:te kolonnen i } A^t \text{ är } j\text{:te raden i } A.$$

Exempel 6.14. (**Transponering.**) Bestäm A^t om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi får transponatet om rad 1 byter plats med kolonn 1, rad 2 med kolonn 2 o.s.v.:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

□

Sats 6.15. För alla matriser A och B och alla reella λ gäller följande räknelagar för transponat:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

Vi förutsätter att operationerna ovan är definierade.

Bevis: Att visa 1), 2) och 3) lämnas som en övning.
Vi visar likheten i 4) genom att jämföra båda leden elementvis; med andra ord genom att visa att elementet på plats (j,i) i båda leden är lika. Enligt definitionen av transponat så är elementet $\star$ på plats (j,i) i $(AB)^t$ lika med element $\star$ som är på plats (i,j) i AB och som ges av

$$\star = (\textit{rad } i \textit{ i matris } A) \times (\textit{kolonn } j \textit{ i matris } B)$$

Motsvarande element på plats (j,i) i $B^t A^t$ är

$$(\textit{rad } j \textit{ i matris } B^t) \times (\textit{kolonn } i \textit{ i matris } A^t) = (\textit{kolonn } j \textit{ i } B) \times (\textit{rad } i \textit{ i } A) = \star.$$

Likheten därmed följer eftersom platsen (j,i) var godtycklig. $\square$