8.4. Existens av determinanten

Nästa sats visar att det verkligen existerar en determinant av A, dvs en funktion av A som uppfyller egenskaperna 1., 2., och 3. i Definition 8.4. Vi behöver nedan beteckningen $A^{(jk)}$ för den matris som fås om rad j och kolonn k tas bort från A.

Sats 8.7. För varje positivt heltal n finns en entydig determinant, $\det A$, av $n \times n$ matriser A som uppfyller egenskaperna 1., 2., och 3. i Definition 8.4.

Bevis: Vi visar satsen med hjälp av induktion.

I. Vi har redan visat att Satsen är sann för $n = 2$, dvs att determinanten uppfyller egenskaperna 1., 2., och 3. i Definition 8.4.

II. Antag att vi redan har definierat determinanter för $(n - 1) \times (n - 1)$-matriser så att egenskaperna 1., 2., och 3. i Definition 8.4 är uppfyllda.

III. Vi definierar determinanter av $n \times n$-matriser genom utveckling av 1:a raden:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det A^{(1k)}. \tag{8.3}$$

a) Antag att $k \neq p$. Då beror inte a_{1p} linjärt på A:s kolonn A_p utan enligt induktionsantagandet i II så beror $A^{(1,k)}$ linjärt på A_p. Om $k = p$, så beror a_{1p} på linjärt på A_p men inte $A^{(1,k)}$. Alltså beror $a_{1k} \det A^{(1k)}$ linjärt på A_p och därmed också $\det A$ i (8.3). Alltså är egenskap 1. i Definition 8.4 klar.

b) Antag att 2 närliggande kolonner är lika. T.ex. $A_p = A_{p+1}$. Då har matriserna $A^{(1k)}$ två lika kolonner utom för $k = p$ och $k = p + 1$. Då är enligt induktionsantagandet II alla $\det A^{(1k)} = 0$ för $k \neq p$ och $k \neq p + 1$. Determinanten i (8.3) blir därmed

$$\det A = (-1)^{1+p} a_{1p} \det A^{(1p)} + (-1)^{1+k} a_{1(p+1)} \det A^{(1(p+1))} = 0,$$

ty $A_p = A_{p+1}$ medför att $a_{1p} = a_{1(p+1)}$ och $A^{1p} = A^{1(p+1)}$. Om de 2 likadana kolonnerna inte är närliggande så kan vi genom att successivt byta plats på dessa så de blir närliggande och därmed är $\det A = 0$. Det är möjligt då platsbyte ändrar enligt 4. bara tecknet hos determinanten.

c) Om $A = E$ så är $a_{11} = 1$ och alla andra $a_{1k} = 0$ och då följer av determinantens definition i (8.3) att

$$\det E = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det A^{(1k)} = \det A^{(11)} = \det E^{(11)} = 1,$$

ty enligt induktionsantagandet II är determinanten av en enhetsmatris av ordning $n - 1$ lika med 1. $\square$

Nästa resultat visar att vi kan beräkna determinantens värde som en utvecklig efter en godtycklig rad.

Sats 8.8. För varje rad $j = 1, 2, \ldots, n$ kan determinaten beräknas enligt

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det A^{(jk)}. \tag{8.4}$$

Bevis: I (8.3) definieras determinanten som en utveckling efter första raden, dvs $j = 1$. I Sats 8.7 ser vi inget hinder till att ha det definierat determinanten efter en godtycklig rad j för att visa att egenskaperna 1., 2., och 3. i Definition 8.4 blir uppfyllda. På grund av entydigeten, så följer nu att determinatnen kan beräknas enligt (8.4). □

Nästa sats visar en symmetriegenskap hos determinanten.

Sats 8.9. Om A är en matris av ordning n, så

$$\det A = \det A^t.$$

Bevis: Låt $D(A)$ beteckna determinanten av A^t. Av entydigheten räcker det att visa att $D(A)$ uppfyller egenskaper 1. 2. och 3. i Definition 8.4. Egenskap 3 är enklsat är visa, ty

$$D(E) = \det(E^t) = \det(E) = 1.$$

För beviset av egenskap 2. och 3. använder vi induktion.

1. Att visa egenskap 1. för $D(A)$ är detsamma sm att visa egenskap 1. för $\det A$ med rader i stället för kolonner. Av (8.4) för utvekling efter rad följer att

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det A^{(jk)}$$

beror linjärt på rad j.

2. Det är klart att om $n = 2$ och båda raderna är lika så är $\det A = 0$. För $n \geq 3$ använder vi Sats 8.8 för att utveckla efter en annan rad än de 2 som är lika. Då får alla matriserna $A^{(jk)}$ i (8.4)

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det A^{(jk)}$$

två likadna rader och därmed är $\det A = 0$. Påståendet följer nu av induktion och vi skriver

$$\det A^t = D(A) = \det A.$$

□

Av beviset för symmetrissatsen ovan följer att vi kan beräkna determinaten om vi utveklar efter en kolonn istället för en rad.

Sats 8.10. För varje kolonn $k = 1, 2, \dots, n$ kan determinaten beräknas enligt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det A^{(jk)}. \tag{8.5}$$

Bevis: Eftersom raderna i A är kolonner A^t, så följer egenskaperna 1. till 5. hos $\det A$ likaså för raderna som för kolonnerna i A av Satserna 8.8 och 8.9 och formel (8.5) gäller. $\square$

Vi kan nu beräkna determinanten för produkt av matriser.

Sats 8.11. Produktsatsen. Om A och B är två $n \times n$ matriser, så är

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Bevis: Sätt $D_1(A) = \det(AB)$ och $D_2(A) = \det A \det B$. Vi låter B vara fix ooh betraktar $D_1(A)$ och $D_2(A)$ som funktioner av A. Om kolonnerna i BA är $BA_1, BA_2, \dots, BA_n$, så kan man visa som tidigare att BA uppfyller egenskap 1. och 2. Likaså gör BA. Vidare gäller om $A = E$ så är

$$D_1(E) = \det B = D_2(E).$$

Av entydighetssatsen Sats 8.6 följer nu att $D_1(A) = D_2(A)$, dvs $\det(AB) = \det A \det B$. $\square$

Exempel 8.12. Beräkna determinanten

$$\text{a)} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Lösning: a) Vi utnyttjar de nollelement vi redan har och försöker skaffa oss fler. T.ex., kan vi med radoperationer skaffa oss ett tredje nollelement i kolonn 1 som vi sen utvecklar efter:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vi skaffar oss med kolonnoperationer ytterligare ett nollelement i kolonn 3 som vi sen utvecklar efter:

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5.$$

$$\text{b)} \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Vi bryter ut -2 från rad 1, rad 2 och rad 3, så att

$$\det A = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -16.$$

□

Exempel 8.13. Beräkna $D = \begin{vmatrix} x & 1 & y & 1 \\ 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & y \end{vmatrix}$.

Lösning: Addera kolonn 2, kolonn 3, och kolonn 4 till kolonn 1, så får vi

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & y & 1 \\ 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+x+y & 1 & y & 1 \\ 2+x+y & y & 1 & x \\ 2+x+y & 1 & x & 1 \\ 2+x+y & x & 1 & y \end{vmatrix} = (2+x+y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & y & 1 \\ 1 & y & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & y \end{vmatrix}.$$

Utför vi radoperationer nu, så

$$\begin{aligned} D &= (2+x+y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & y & 1 \\ 0 & y-1 & 1-y & x-1 \\ 0 & 0 & x-y & 0 \\ 0 & x-1 & 1-y & y-1 \end{vmatrix} = \{\text{utveckla längs rad 3}\} \\ &= (2+x+y) \cdot (-1)^{3+3}(x-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-1 & x-1 \\ 0 & x-1 & y-1 \end{vmatrix} = \{\text{utveckla längs kolonn 1}\} \\ &= (x-y)(2+x+y) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} y-1 & x-1 \\ x-1 & y-1 \end{vmatrix} = (x-y)(2+x+y) \underbrace{\left((y-1)^2 - (x-1)^2\right)}_{(x-y)(2-x-y)} \\ &= \{\text{konjugatregeln}\} = (x-y)^2(2+x+y)(2-x-y). \end{aligned}$$

□

Exempel 8.14. Lös ekvationen $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ x & 2 & -2 & x^2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$

Lösning: Ta t.ex kolonn 4 minus kolonn 1, så

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ x & 2 & -2 & x^2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 2 & -2 & x^2-x \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{utveckla längs kolonn 4}\} \\ &= (-1)^{2+4}(x^2-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{kolonn 2 minus kolonn 1}\} \\ &= (x^2-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & -x & 1 \end{vmatrix} = \{\text{utveckla längs rad 1}\} \\ &= (x^2-x)(-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = (x^2-x)(x+1) = x(x^2-1). \end{aligned}$$

Ekvationen har rötterna 0 och ±1. □

Ett intressant resultat som är en direkt följd av Sats 8.11 är när A är inverterbar med inversen A^{-1}.

Sats 8.15. Låt A vara en $n \times n$ matris. Då är

$$A \text{ inverterbar } \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

och i så fall gäller att

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Bevis: $\Rightarrow$: Om A är inverterbar, så

$$1 = \det E = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A$$

samt att $\det A \neq 0$.

$\Leftarrow$: Antag att A inte är inverterbar. Då följer av Sats 6.31 att A:s kolonner $A_1, A_2, \ldots, A_n$ är linjärt beroende och därmed kan någon kolonn t.ex. A_1 skrivas som en linjärkombination i de övriga

$$A_k = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k A_k.$$

Vi får därmed

$$\det A = \det\left(\sum_{k=2}^{n} \lambda_k A_k, A_2, \ldots, A_n\right) = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \det(A_k, A_2, \ldots, A_n) = 0,$$

ty varje determinant $\det(A_k, A_2, \ldots, A_n)$ innehåller 2 likadana kolonner och är därmed 0 för varje $k = 2, \ldots, n$. Alltså är om A inte inverterbar så är $\det A = 0$ och därmed har vi visat att om $\det A \neq 0$, så är A är inverterbar så är . □

Exempel 8.16. Undersök om matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ är inverterbar. Bestäm $\det A^{-1}$.

Lösning: Enligt Sats 4.11 har en kvadratisk matris A invers om och endast om $\det A \neq 0$. Dessutom är $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$. Vi beräknar därför $\det A$. Vi utnyttjar att vi redan har nollor i A och skaffar fler. T.ex. subtraherar vi kolonn 1 från kolonn 2:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Alltså är A inverterbar. Inversen A^{-1} har determinanten

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{4}.$$

□