

### 16.3. Projektion och Spegling

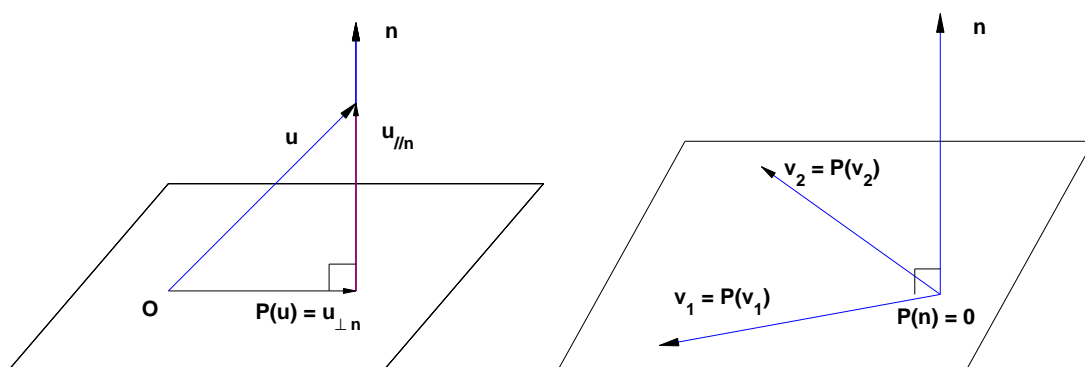
**Exempel 16.14.** Bestäm matrisen för projektionen  $P$  av rummet vinkelrät mot planet

$$W : 2x - y - 2z = 0.$$

Bestäm också bilden av basvektorerna  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  och  $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ . (ON-bas).

**Lösning:** a) Använd **projektionsformeln** b) Utnyttja att  $P$  är **linjär**

**Figur 16.15.**



a) Projektionsformeln ger

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\perp \mathbf{n}} + \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}} \quad \text{där} \quad \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} \quad \text{och} \quad P(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{\perp \mathbf{n}} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n}.$$

Matrisen  $A$  för projektionen  $P$  innehåller i sina kolonner bilden av basvektorerna. Vi följer

Exempel 12.34 och låter  $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  vara en godtycklig vektor. Då får vi

$$\begin{aligned} P(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \frac{2x_1 - x_2 - 2x_3}{9} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\mathbf{e}} \frac{1}{9} \left\{ \begin{pmatrix} 9x_1 \\ 9x_2 \\ 9x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \right\} = \underline{\mathbf{e}} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\mathbf{e}} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alltså har  $P$  matrisen  $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

b)  $P$  är linjär. Låt  $\mathbf{v}_1 = \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{v}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  vara två vektorer i planet  $W$ .

(Visa detta genom att sätta in vektorernas koordinater i planet  $W$ :s ekvation). Då kommer normalen  $\mathbf{n}$  att avbildas på  $\mathbf{0}$  och  $\mathbf{v}_1$  och  $\mathbf{v}_2$  att avbildas på sig själva eftersom dessa redan ligger i planet  $W$ . Vi har alltså att

$$\begin{cases} P(\mathbf{n}) = \mathbf{0} \\ P(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 \\ P(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3) = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3 \\ P(2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ P(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Eftersom  $P$  är linjär så får vi systemet

$$\begin{cases} 2P(\mathbf{e}_1) - P(\mathbf{e}_2) - 2P(\mathbf{e}_3) = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3 \\ 2P(\mathbf{e}_1) + 2P(\mathbf{e}_2) + P(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ P(\mathbf{e}_1) - 2P(\mathbf{e}_2) + 2P(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Löser vi systemet för de obekanta  $P(\mathbf{e}_1)$ ,  $P(\mathbf{e}_2)$  och  $P(\mathbf{e}_3)$  som i Exempel 16.13 får vi att

$$\begin{cases} P(\mathbf{e}_1) = (5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3)/9 \\ P(\mathbf{e}_2) = (2\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)/9 \\ P(\mathbf{e}_3) = (4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3)/9 \end{cases}$$

som ger matrisen  $A$  igen.

Vi projicerar nu vektorn  $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$  och får bilden

$$P(\mathbf{w}) = P \left( \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \underline{e} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{e} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

□

I anmärkningen nedan tar vi upp ett antal viktiga egenskaper hos en projektion som kan verifieras för exemplet ovan.

**Anmärkning 16.16.** Om  $A$  är matrisen för projektionen i Exempel 16.14, så är

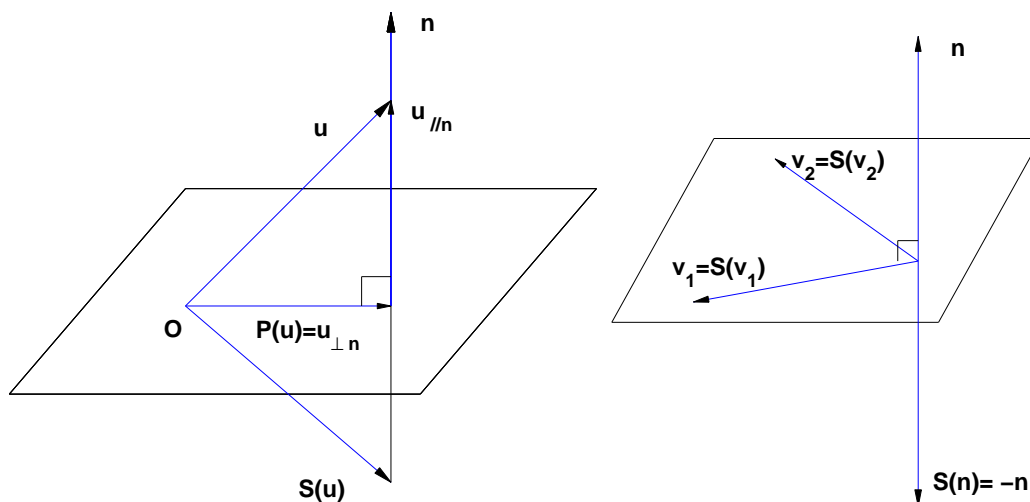
1.  $A$  symmetrisk.
2.  $\det A = 0$ .
3.  $A^2 = A$ .

Vi visar i Anmärkning 16.55 att i rummet har alla ortogonala projektioner på ett plan dessa egenskaper. Däremot visar vi i Kapitel 24 det allmänna fallet att i  $n$ -dimensionellt rum så har alla ortogonala projektioner på underrum dessa egenskaper.

**Exempel 16.17.** Ange matrisen för speglingen  $S$  i planet  $W : 2x - y - 2z = 0$ . (ON-bas).

**Lösning:** a) Projektionsformeln b)  $S$  är linjär:

**Figur 16.18.**



a) Låt  $\mathbf{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  vara en godtycklig vektor i rummet. Då gäller att

$$\begin{aligned} S(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\parallel n} = \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} = \underline{e} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - 2\frac{2a - b - 2c}{9} \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{e} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \underline{e} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8a - 4b - 8c \\ -4a + 2b + 4c \\ -8a + 4b + 8c \end{pmatrix} = \underline{e} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} a + 4b + 8c \\ 4a + 7b - 4c \\ 8a - 4b - c \end{pmatrix} = \underline{e} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alltså ges avbildningsmatrisen för speglingen  $S$  av  $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Idén här är att utnyttja egenskapen hos  $S$ , dvs att normalen  $\mathbf{n}$  avbildas på  $-\mathbf{n}$  samt att två godtyckligt linjärt oberoende vektorer i planet  $W$  avbildas på sig själva. T.ex. tar vi  $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$  och  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$  i  $W$ . Detta ger att

$$\begin{cases} S(\mathbf{n}) = -\mathbf{n} \\ S(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 \\ S(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ S(2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ S(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{9}(\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3) \\ S(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{9}(4\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3) \\ S(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{9}(8\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \end{cases}$$

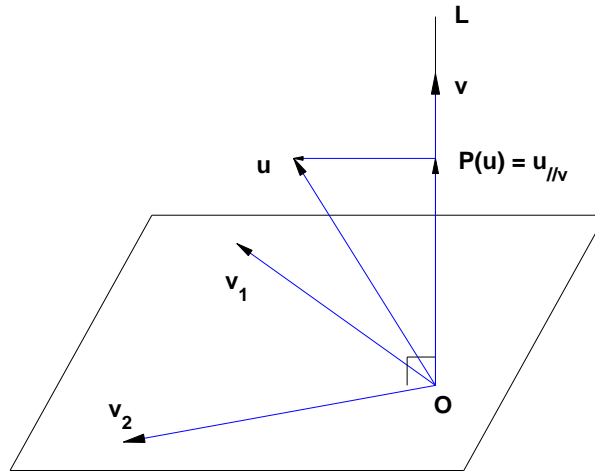
vilket ger samma avbildningsmatris  $A$  som ovan. Systemet ovan löses p.s.s i Exempel 16.13.

□

**Exempel 16.19.** Bestäm matrisen för projektionen av rummet vinkelrät mot den räta linjen  $L: (x, y, z) = t(1, 2, -2)^t$  (ON-bas).

**Lösning:** a) Projektionsformeln    b)  $P$  är linjär

**Figur 16.20.**



Låt  $\mathbf{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  vara riktningsvektorn hos linjen och låt  $\mathbf{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  vara en godtycklig vektor. Projektionsformeln ger:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \cdot \mathbf{v} = \underline{e} \frac{a + 2b - 2c}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{e} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} a + 2b - 2c \\ 2a + 4b - 4c \\ -2a - 4b + 4c \end{pmatrix} = \underline{e} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alltså ges avbildningsmatrisen till projektionen  $P$  av  $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ .

b)  $P$  projicerar riktningsvektorn  $\mathbf{v}$  på sig själv, samt två godtyckligt linjärt oberoende vektorer, ortogonala mot  $\mathbf{v}$ , t.ex.  $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$  och  $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$  projiceras på nollvektorn  $\mathbf{0}$ . Detta ger att

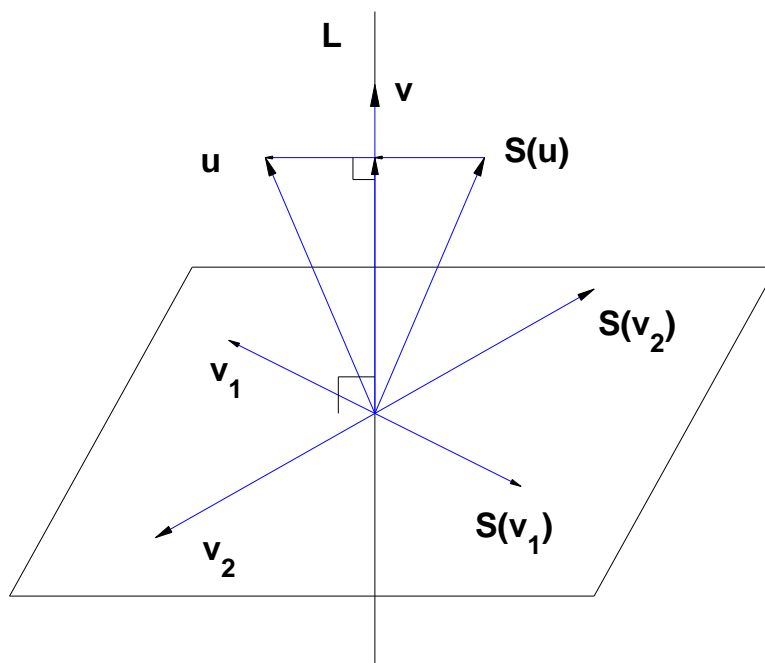
$$\begin{aligned} \begin{cases} P(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} \\ P(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{0} \\ P(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \\ P(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) &= \mathbf{0} \\ P(2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) &= \mathbf{0} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} P(\mathbf{e}_1) &= (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)/9 \\ P(\mathbf{e}_2) &= (2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3)/9 \\ P(\mathbf{e}_3) &= (-2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3)/9 \end{cases} \end{aligned}$$

Vi får samma avbildningsmatris  $A$  som ovan. □

**Exempel 16.21.** Bestäm matrisen för en spegling av rummet i den räta linjen  $L: (x, y, z) = t(1, 2, -2)^t$ . Bestäm också bilden av vektorn  $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ . (ON-bas).

**Lösning:**

**Figur 16.22.**



a) Eftersom spegelbilden uppfyller

$$S(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}$$

så ges avbildningsmatrisen av  $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$ .

b) Alternativt kan vi lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} S(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \\ S(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_1 \\ S(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2 \end{cases}$$

där vektorerna  $\mathbf{v}_1$  och  $\mathbf{v}_2$  är ortogonal mot  $\mathbf{v}$  och kan vara som i Exempel 16.19.

Vidare gäller att

$$S(\mathbf{w}) = \frac{1}{9} \underline{\underline{e}} \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \underline{\underline{e}} \begin{pmatrix} -11 \\ -22 \\ -23 \end{pmatrix} = -\frac{11}{9} \mathbf{e}_1 - \frac{22}{9} \mathbf{e}_2 - \frac{23}{9} \mathbf{e}_3.$$

□