8.2. Determinanter av godtycklig ordning

Definition 8.4. Låt A vara en $n \times n$-matris. **Determinanten**, $\det A$, av matrisen A är en funktion av matrisen A som uppfyller följande villkor:

1. Determinanten $\det A$ beror linjärt på varje kolonn, dvs om en kolonn är en linjärkombination $\lambda A_j + \mu A_j^*$, så är
$$\begin{aligned}\det(A_1, A_2, \ldots, \lambda A_j + \mu A_j^*, \ldots, A_n) &= \det(A_1, A_2, \ldots, \lambda A_j, \ldots, A_n) \\ &\quad + \det(A_1, A_2, \ldots, \mu A_j^*, \ldots, A_n).\end{aligned}$$
2. $\det A = 0$ om 2 kolonner är lika.
3. $\det E = 1$

Av definitionen ovan följer några viktiga egenskaper.

Sats 8.5. Låt A vara en $n \times n$-matris. Determinanten $\det A$ uppfyller följande:

4. $\det A$ byter tecken om 2 kolonner byter plats.
5. $\det A$ ändras inte om man lägger en multipel av en kolonn till en annan.

Bevis: Enligt villkor 1. i Definition 8.4, så gäller att

$$\begin{aligned}\det(A_1, \ldots, A_j + A_p, \ldots, A_j + A_p, \ldots, A_n) &= \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\ &\quad + \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_p, \ldots, A_n) \\ &\quad + \det(A_1, \ldots, A_p, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\ &\quad + \det(A_1, \ldots, A_p, \ldots, A_p, \ldots, A_n).\end{aligned}$$

Enligt villkor 2. i Definition 8.4 är vänstra ledet samt första och sista termen i högra ledet 0; då 2 kolonner är lika. Alltså följer att

$$\det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_p, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_p, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = 0,$$

och därmed har vi visat villkor 4. Vidare följer av villkor 1. i Definition 8.4 att

$$\begin{aligned}\det(A_1, \ldots, A_j + \lambda A_p, \ldots, A_p, \ldots, A_n) &= \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_p, \ldots, A_n) \\ &\quad + \lambda \det(A_1, \ldots, A_p, \ldots, A_p, \ldots, A_n) \\ &= \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_p, \ldots, A_n),\end{aligned}$$

ty återigen 2 kolonner är lika och därmed följer 5. $\square$