6. Matriser

6.1. Definition av matriser

Låt m och n vara heltal ≥ 1. En **matris** A är ett rektangulärt schema av tal ordnade enligt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrisen A säges vara av **typ** $m \times n$, där m är antalet **rader** och n är antalet **kolumner** (eller **kolonner**) i matrisen. Talen a_{ij} kallas matrisens element. Första index i betecknar den rad och andra index j den kolumn elementet a_{ij} står på. Ofta är det bekvämt att skriva matrisen ovan på ett mera kompakt sätt och det gör vi genom att införa beteckningen

$$A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

Exempel 6.1. Matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{och} \quad D = (7)$$

är av typ 2×3, 1×3, 3×1, respektive 1×1. Vi säger att B är en **radmatris**, C är en **kolumnmatris** och ofta identifierar vi matrisen D med reella tal, så att $(7) = 7$. □

Vi gör följande definitioner för matriser av samma typ.

Definition 6.2. Låt $A = (a_{ij})_{m\times n}$ och $B = (b_{ij})_{m\times n}$ vara två matriser och låt $\lambda \in \mathbf{R}$. Vi definierar

1. **Addition.** Summan mellan A och B definieras som

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

2. **Multiplikation med reellt tal.** Produktem av λ och A definieras som

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

3. **Likhet.** Vi säger att A och B är lika om

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

4. **Nollmatrisen.** Om alla elementen $a_{ij} = 0$, säger vi att matrisen A är en nollmatris och skriver $A = \mathbf{0}$.

Exempel 6.3. (**Addition**) Summan av två matriser av samma typ definieras elementvis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

□

Exempel 6.4. (**Multiplikation med tal**) Produkten av en matris med ett tal definieras elementvis:

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 1 & 7\cdot 2 & 7\cdot 3 \\ 7\cdot 4 & 7\cdot 5 & 7\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \end{pmatrix}.$$

□

Exempel 6.5. Beräkna $3A - B$, om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi multiplicerar in 3 i A och subtraherar elementvis:

$$3A - B = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

Produkten mellan matriser har vi faktiskt stött på tidigare.

Exempel 6.6. Basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ i rummet är en radmatris. Vi vet att vektorn $\boldsymbol{u}$ med koordinaterna i en kolonnmatris $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ kan skrivas som en linjärkombination av basen $\underline{\boldsymbol{e}}$ enligt

$$\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Vi har alltså uppfattat produkten mellan matriserna som en rad i den vänstra matrisen gånger en kolonn i den högra matrisen. □

Definition 6.7. Produkt mellan matriser. Låt matriserna $A = (a_{ij})_{m\times p}$ och $B = (b_{ij})_{p\times n}$. Produkten $C = AB$ är en matris av typen $m \times n$. Elementen c_{ij} i C ges av

produkten av rad i *i matris* A *med kolonn* j *i matris* B,

dvs

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Exempel 6.8. Betrakta den 3×2-matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, och den 2×2-matrisen $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$. Låt oss se om produkten $C = AB$ är definierad. Eftersom

$$(\underline{3} \times \underline{\underline{2}}) \cdot (\underline{\underline{2}} \times \underline{2}) = \underline{3} \times \underline{2},$$

dvs antal kolonner i A är lika med antal rader i B, så är produkten $C = AB$ en 3×2 matris. Matrisen C kan då beräknas enligt

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times\underline{\underline{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}_{\underline{\underline{2}}\times\underline{2}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 9 & 1\cdot 8 + 2\cdot 10 \\ 3\cdot 7 + 4\cdot 9 & 3\cdot 8 + 4\cdot 10 \\ 5\cdot 7 + 6\cdot 9 & 5\cdot 8 + 6\cdot 10 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times\underline{2}} = \begin{pmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times\underline{2}}.$$

Vi kan också välja att beräkna kolonnerna i matrisen $C = (C_1\ C_2)$. Om B_1 och B_2 är kolonnerna i matrisen B så får vi att

$$AB = C \Leftrightarrow A(B_1\ B_2) = (C_1\ C_2) \Leftrightarrow AB_1 = C_1 \text{ och } AB_2 = C_2,$$

dvs

$$AB_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times\underline{\underline{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}_{\underline{\underline{2}}\times\underline{1}} = \begin{pmatrix} 25 \\ 57 \\ 89 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times\underline{1}} = C_1$$

och

$$AB_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times\underline{\underline{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}_{\underline{\underline{2}}\times\underline{1}} = \begin{pmatrix} 28 \\ 64 \\ 100 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times\underline{1}} = C_2.$$

Alltså så är $C = \begin{pmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times\underline{2}}$.

Däremot är BA inte definierad. Eftersom $(2 \times \underline{2}) \cdot (\underline{3} \times 2)$ ej lika, så är antalet kolonner i B och antalet rader A ej lika och produkten går inte ihop sig:

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}_{2\times\underline{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times 2}.$$

□

Exempel 6.9. Beräkna AB och BA, om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi har att

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

och

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 6\cdot 3 & 5\cdot 2 + 6\cdot 4 \\ 7\cdot 1 + 8\cdot 3 & 7\cdot 2 + 8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

□

Exempel 6.9 visar att man **inte** kan kasta om ordningen i en matrisprodukt, dvs $AB \neq BA$. Observera också att produkten av två nollskilda matriser kan bli en **nollmatris**.

Exempel 6.10. Vi säger att två matriser A och B **kommuterar** med varandra om

$$AB = BA.$$

Bestäm alla matriser som kommuterar med $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Lösning: Låt $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Det gäller att

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -b+c & -a+2b+d & 0 & 0 \\ a-2c-d & b-c & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Varje komponent i systemet måste alltså uppfylla

$$\begin{cases} -b+c &= 0 \\ a-2c-d &= 0 \\ -a+2b+d &= 0 \\ b-c &= 0 \end{cases}$$

Detta ger att $b = c$ och $a = 2c + d$. Sätter vi $d = t$ och $c = s$ får vi $b = s$ och $a = 2s + t$. Matrisen B ges alltså av

$$B = \begin{pmatrix} 2s+t & s \\ s & t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså ges de matriser B som kommuterar med A av de som är en linjärkombination av matriserna $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. □